

Capítulo 7

Trabalho e Conservação da Energia

Dante Ferreira Franceschini Filho

7.1 Introdução

Trabalho e energia são conceitos fundamentais em todas as áreas da Física. Estudiosos medievais da Mecânica já supunham que alguma quantidade relacionada ao movimento era conservada. Leibnitz (1646-1716) já propunha que uma grandeza, por ele denominada força viva (em latim, *vis viva*), igual a mv^2 (o dobro do que hoje se denomina energia cinética), seria esta grandeza conservada, a qual se constituía em uma medida da altura a que um corpo em movimento poderia erguer uma massa ou do dano que este corpo em movimento poderia causar após impacto.

Trabalho e energia representaram um papel importante também no desenvolvimento da Termodinâmica, tendo sido introduzidos na discussão da eficiência de máquinas térmicas, por intermédio dos trabalhos de investigação de engenheiros como Sadi Carnot (1796-1832) e James Joule (1818-89), vindo a ser, mais tarde, expressos na primeira e na segunda lei da Termodinâmica. A termodinâmica, conforme proposto por William Thomson (1820-1907), ou Lord Kelvin, revolucionou a Física, explicitando claramente a conexão entre trabalho e energia. A definição precisa de diversos outros conceitos.

No contexto deste livro, a discussão de trabalho e energia será introduzida como um novo método para resolver alguns problemas de mecânica newtoniana. Até agora, ao resolvermos problemas de mecânica por meio da segunda lei de Newton, o que fizemos foi utilizar a equação 5.6, considerando a dependência tem-

poral da força e da posição, ou:

$$\mathbf{F}(\mathbf{t}) = m \frac{d^2 \mathbf{r}(\mathbf{t})}{dt^2} \quad (7.1)$$

Assim, conhecendo-se $\mathbf{r}(t)$, podemos determinar a $\mathbf{F}(t)$ e vice-versa. Todavia, em geral, a força não é conhecida como função do tempo, mas como função da distância, como nos casos do sistema massa-mola, ou do movimento dos astros. Mesmo considerando que, para o sistema massa-mola, a equação 7.1 pode ser resolvida exatamente, a introdução dos conceitos de trabalho e energia permite tratá-lo, e a outros problemas, de forma mais simples, sem a necessidade de estabelecermos a dependência explícita da posição com o tempo.

Neste capítulo, os conceitos de trabalho e energia cinética serão introduzidos no contexto do Teorema do Trabalho-Energia Cinética. Diversos problemas de Mecânica, associados às forças dependentes da posição, serão tratados utilizando esse teorema. Os problemas serão discutidos com aumento gradativo de complexidade, introduzindo a Lei da Conservação da Energia Mecânica, até chegarmos à formulação da Lei da Conservação da Energia Total, que é uma das leis de conservação fundamental da Física. Será discutido, também, o conceito de potência, que tem grande importância no nosso dia-a-dia, pois está relacionado ao consumo de energia em transportes, residências, fábricas etc.



7.2 Trabalho e Energia Cinética em Uma Dimensão com Força Constante

Ao longo deste capítulo, teremos como tema de discussão o trabalho de uma força e sua conexão com a energia cinética, conceitos que já devem ter sido apresentados ao estudante no curso secundário. Faremos essa abordagem sem envolver o tempo, pois, em muitas das interações observadas na natureza, as forças não apresentam dependência explícita com o tempo.

É muito comum, porém conhecermos algumas forças em função da posição. Nesta seção, faremos uma descrição do movimento de uma partícula em uma dimensão, submetida a uma força constante, em função de sua posição x e sua velocidade v , partindo de resultados obtidos pela aplicação da segunda lei de Newton.

Tratar do movimento de uma partícula de massa m submetida a uma força F constante em uma dimensão é uma tarefa simples. Esse problema corresponde ao movimento de uma partícula com aceleração constante, para o qual podemos utilizar a equação da posição em função do tempo estudada no Capítulo 3 (equação 3.17)

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (7.2)$$

onde x é a posição da partícula no tempo t , x_0 é a posição inicial, v_0 é a velocidade inicial e a_0 é a aceleração constante. Entretanto, fica mais fácil expressar o movimento da partícula em função de x e v utilizando a equação 3.18, ou

$$v^2 = v_0^2 + 2 a (x - x_0) \quad (7.3)$$

Substituindo $(x - x_0)$ por Δx e incorporando a segunda lei de Newton na equação 7.3, substituindo a aceleração a por F/m , obtemos:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \frac{F}{m} \Delta x \quad (7.4)$$

que pode ser reescrita como:

$$F \Delta x = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (7.5)$$

que constitui uma descrição do movimento da partícula em função de x e v . Testemos esse novo método aplicando-o a um problema já resolvido, como o de uma partícula em queda livre (ver seção 3.8).

Exemplo 7.1

Determine, utilizando a equação 7.5, a velocidade, ao atingir o solo, de uma partícula largada do repouso de uma altura h , como mostra a Figura 7.1.

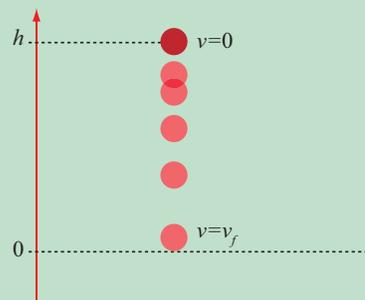


Figura 7.1: Uma partícula em queda livre.

Solução: adotando o referencial mostrado na Figura 7.1, a força constante que atua sobre a partícula em queda livre é igual ao peso da partícula

$$F = -mg$$

e a variação de posição é igual a:

$$\Delta x = -h$$

Substituindo os valores de F e Δx acima e $v_0 = 0$ na equação 7.5, obtemos:

$$F \Delta x = (-mg) \cdot (-h) = \frac{1}{2} m v^2$$

de onde podemos obter a velocidade da partícula ao atingir o solo:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Esse resultado é igual ao que se obtém aplicando-se a equação 7.3 sem utilizar a força, mas fazendo $a_0 = -g$, como pode ser verificado pelo estudante.

Nas seções seguintes, trataremos de estender o método acima para outras situações mais complexas. Antes, porém, definiremos as grandezas que constituem o alvo principal deste capítulo: o trabalho de uma força, e a energia cinética de uma partícula.

Chamamos de **trabalho** de uma força constante em uma dimensão e representamos por W (do inglês *work*, que significa trabalho) o produto da força F pelo deslocamento Δx da partícula durante o período de tempo que a força age, ou seja

$$W = F \Delta x \quad (\text{trabalho de um força constante}) \quad (7.6)$$

Definimos a **energia cinética** de uma partícula, representada como K (do inglês *kinetic*, traduzido como cinética), como:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{energia cinética de uma partícula}) \quad (7.7)$$

onde m é a massa da partícula e v é a sua velocidade.

A equação 7.5 pode, então, ser escrita, usando as definições dadas pelas equações 7.6 e 7.7, na forma:

$$W = K_f - K_i = \Delta K \quad (7.8)$$

A equação 7.8 estabelece uma importante lei da mecânica, que trata da conversão do trabalho em energia cinética.

Teorema do trabalho-energia cinética: o trabalho da força resultante agindo sobre uma partícula é igual à variação da energia cinética desta mesma partícula, $W = K_f - K_i = \Delta K$.

É importante ressaltar que esse teorema se aplica apenas se o trabalho envolvido for o da força resultante. Lembre-se que, para deduzir a equação 7.8, foi feito uso da segunda lei de Newton. Ambas as grandezas, trabalho e energia cinética, são medidas em *Joule*, a unidade de energia no SI, que é abreviado por J e equivalente a 1 N m ou $1 \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}$. Devemos atentar para o fato de a equação 7.8 significar que “o efeito de uma força é alterar o estado do movimento da partícula”. O trabalho carrega o significado de efeito da força e a variação da energia cinética carrega o significado de mudança do estado de movimento. O fato de a energia cinética ser dada pela velocidade ao quadrado resulta na perda da informação do sentido do movimento.

7.3 Trabalho de Forças Variáveis em Uma Dimensão

Vamos continuar tratando do movimento em uma dimensão, mas vamos considerar que a partícula estudada se move sob a ação de uma força variável, como ilustra a Figura 7.2. A designação $F(x)$ dada a essa força deve ser compreendida como uma dependência da força F com a posição x .

Nosso problema consiste em estender o conceito de trabalho para uma força que não seja constante. Uma maneira de fazer isso é dividir o intervalo de posição que estamos interessados em estudar em um número $N-1$ de subintervalos e aproximar, por uma força constante, a função que descreve a força em cada subintervalo, como mostra a Figura 7.2. Por exemplo, no primeiro intervalo, entre x_1 e x_2 , o valor da força será dado por $F(x_1)$, ao que chamaremos, por simplicidade, de F_1 . No i -ésimo intervalo, limitado à esquerda por

x_i , o valor da força será aproximado por $F(x_i)$, ao que chamaremos de F_i . Então, em cada intervalo de largura Δx_i ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$), o trabalho será dado por:

$$W_i = F_i \Delta x_i \quad (7.9)$$

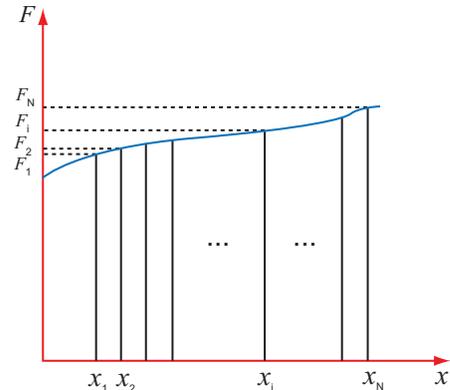


Figura 7.2: Força dependente da posição.

Assim, na nossa proposta, o trabalho em todo o intervalo que vai de x_1 a x_N poderá ser aproximado por:

$$W \cong \sum_{i=1}^N F_i \Delta x_i \quad (7.10)$$

Nosso objetivo, no entanto, não é definir aproximadamente o trabalho, mas obter uma definição unívoca para o trabalho que funcione para uma força que seja descrita por uma função genérica dependente da posição. Para alcançarmos esse objetivo, devemos observar que quanto menor for a largura de um intervalo Δx_i , melhor será a aproximação de força constante para esse intervalo, como mostra a Figura 7.3. No limite em que a largura do intervalo tende a zero, podemos admitir que a equação 7.10 seja uma boa definição para o trabalho de uma força variável, ou seja:

$$W = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^N F_i \Delta x_i \quad (7.11)$$

onde o somatório é feito sob a condição de que a largura de todos os intervalos tendam a zero. Isso é equivalente a N tender a infinito.

Devemos atentar para o fato de que o trabalho em cada subintervalo é dado pelo teorema do trabalho-energia cinética (equação 7.8), já que assumimos força constante em cada intervalo. Aplicando a equação 7.8

em cada intervalo, obteremos:

$$W = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^{N-1} F_i \Delta x_i = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 + \dots + \frac{1}{2}mv_N^2 - \frac{1}{2}mv_{N-1}^2 \quad (7.12)$$

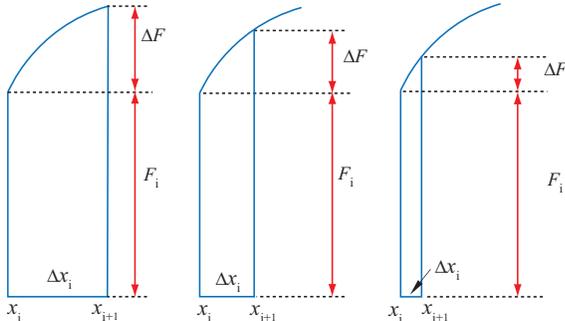


Figura 7.3: Qualidade da aproximação de força constante em função da largura dos subintervalos.

Observe que, nessa soma, à exceção dos extremos, todos os termos são anulados pelos seus simétricos, resultando em:

$$W = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^N F_i \Delta x_i = \frac{1}{2}mv_N^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (7.13)$$

Ou seja, utilizando a equação 7.11 como definição para o trabalho de uma força variável, percebemos, da mesma forma que para a força constante, que o trabalho de uma força variável é igual à variação da energia cinética da partícula. Chegamos, portanto, a uma definição de trabalho consistente com os nossos objetivos, mas devemos observar que, apesar de correta, a definição de trabalho dada pela equação 7.11 não nos permite calcular facilmente o trabalho de uma força variável. É claro que podemos fazê-lo, por exemplo, computacionalmente, dividindo o intervalo de interesse em um número grande de subintervalos e realizando a soma dada pela equação 7.11, obtendo o valor do trabalho com uma boa aproximação, como é pedido no Problema 7.5. Contudo, é mais interessante obtermos um procedimento matemático analítico mais adequado para o cálculo do trabalho.

Uma maneira de obter um valor para o trabalho de uma força variável é a visualizada na Figura 7.4. Nessa figura, está ilustrada graficamente a passagem ao limite $\Delta x \rightarrow 0$ no cálculo do trabalho de uma força variável. Podemos observar, na sequência de gráficos mostrada na figura, que quanto menores são os subin-

tervalos utilizados, mais próxima fica a soma das áreas dos retângulos aproximativos do valor real da área da região situada entre a curva, que descreve a força, e o eixo das posições. Portanto, no limite em que $\Delta x \rightarrow 0$, o trabalho realizado por uma força variável é igual à área da superfície limitada pela curva que descreve a força, pelo eixo das posições e pelas posições inicial e final do intervalo considerado, como mostra a Figura 7.4.

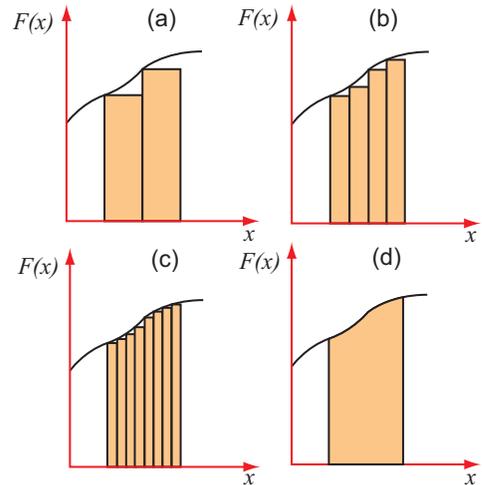


Figura 7.4: (a) Área do retângulo delimitado pelo intervalo e pelo valor da força em um de seus extremos; (b)-(d) Processo de passagem ao limite $\Delta x \rightarrow 0$.

A forma equivalente, mas mais rigorosa para se calcular o trabalho, é observar que a soma infinita descrita na equação 7.11 é o que se conhece por integral definida (entre os extremos do intervalo no qual queremos calcular o trabalho) da função que descreve a força

$$W_a^b = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^N F_i \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx \quad (7.14)$$

Com base nessa definição de trabalho de uma força variável, podemos mostrar de forma mais rigorosa o teorema do trabalho-energia cinética. Para tanto, como fizemos para força constante, introduzimos a segunda lei de Newton na definição de trabalho, substituindo $F(x) = ma = m \, dv/dt$, ou

$$W_a^b = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b m \frac{dv}{dt} dx \quad (7.15)$$

Podemos exprimir a velocidade v como uma função da posição x , $v = v(x(t))$. Para isso, utilizamos a regra da cadeia para as derivadas¹

¹Regra da cadeia para derivadas: se f é uma função composta com g , ou seja $f(x)=f(g(x))$, então temos que $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}$:



$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

Efetuada a substituição na equação 7.15, obtemos:

$$\begin{aligned} W_a^b &= \int_a^b mv \frac{dv}{dx} dx = m \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

ou

$$W_a^b = \int_a^b F(x) dx = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (7.17)$$

**(Teorema do trabalho-energia cinética -
Força variável em uma dimensão)**

Assim, chegamos ao mesmo resultado obtido para força constante (equação 7.8), ou seja, o trabalho da força agindo sobre uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa mesma partícula.

Com a dedução do teorema do trabalho-energia cinética, torna-se possível a resolução de problemas, de forças variáveis em uma dimensão, que, em alguns casos, é muito difícil de ser executada aplicando-se diretamente a segunda lei de Newton. Deve-se ressaltar, porém, que esse novo método de resolver problemas de mecânica não se constitui em uma substituição à segunda lei de Newton, mas em uma nova maneira de apresentá-la. Lembre-se que essa lei foi introduzida no desenvolvimento do método, na equação 7.15.

Exemplo 7.2

No exemplo 1, calculamos a velocidade atingida por uma partícula de massa m largada do repouso, de uma altura h , como mostra a Figura 7.1, adotando a força $F = -mg$ constante. Entretanto, a força gravitacional varia com a distância ao centro da Terra r , sendo dada por $F = -\frac{GM}{r^2}m$ (equação 6.1), onde M é a massa da Terra e G é a constante gravitacional. Calcule novamente a velocidade atingida pela partícula considerando essa equação para a força.

Solução: para utilizar a força gravitacional acima, devemos adotar o centro da Terra como referência, ou seja, os limites de integração da equação 7.17 serão R e $R+h$ (onde R é o raio da Terra). Assim, adotando $v_0 = 0$ na equação 7.17, teremos:

$$W_{R+h}^R = \int_{R+h}^R F(r) dr = \int_{R+h}^R -\frac{GM}{r^2} m dr = \frac{1}{2}mv^2$$

Fazendo a integração, obtemos:

$$\frac{GM}{r} m \Big|_{R+h}^R = \frac{1}{2}mv^2$$

que fornece:

$$v = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)} = \sqrt{2GM \frac{h}{R(R+h)}}$$

que é bem diferente do valor encontrado no exemplo 1 ($v = \sqrt{2gh}$). Entretanto, se h for pequeno ($h \ll R$), ou seja, para queda de objetos próximos à superfície da Terra, podemos aproximar a equação acima desprezando h no denominador, de forma que teremos:

$$v \approx \sqrt{2 \frac{GM}{R^2} h}$$

O valor $\frac{GM}{R^2}$ corresponde à aceleração da gravidade g próximo à superfície da Terra, assim:

$$v \approx \sqrt{2gh}$$

que é o mesmo valor encontrado no Exemplo 1.

7.4 Trabalho de Uma Força Elástica

As forças elásticas foram apresentadas no capítulo anterior, seção 6.3. Um exemplo da ação de forças elásticas é o sistema massa-mola, mostrado na Figura 6.4. Como acontece com outras forças elásticas, a força que a mola exerce sobre a massa que se move sobre o plano horizontal é dada pela Lei de Hooke (equação 6.9), $F(x) = -k\Delta x$, onde k é uma constante de proporcionalidade (constante de mola ou constante elástica) e Δx é o deslocamento da massa em relação à posição na qual a mola tem seu comprimento natural relaxada. O sinal negativo indica que a força elástica é uma força restauradora, ou seja, atua no sentido de restaurar a posição de equilíbrio. Podemos descrever o estado de uma mola por meio da medida da posição de sua extremidade livre. Para isso, podemos utilizar um eixo de referência cuja origem corresponda à posição de equilíbrio, ou relaxada, da mola. Assim, podemos escrever a lei de Hooke como:

$$F(x) = -kx \quad (7.18)$$

Dessa forma, ao esticarmos a mola, o valor da posição x de sua extremidade fixa será positivo, sendo negativo ao comprimirmos a mola. O sentido, ou o sinal, da força $F(x)$ também é facilmente obtido pelo valor de Δx . Ao esticarmos a mola ($\Delta x > 0$), a força da mesma sobre o corpo que está preso à sua extremidade livre aponta para a esquerda, portanto, $F(x) < 0$. Da mesma forma, ao comprimirmos a mola, o valor de $F(x)$ será positivo.

Calculemos o trabalho realizado por uma força elástica, quando a partícula percorre um intervalo situado entre duas posições $x = a$ e $x = b$, como mostra

a Figura 7.5. O trabalho é dado por:

$$\begin{aligned} W_a^b &= \int_a^b F(x) dx = \int_a^b (-kx) dx \\ &= -k \int_a^b x dx = -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kb^2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Como a região abaixo da curva que descreve a força é geometricamente simples, também podemos calcular o trabalho, mediante determinação direta da área abaixo da curva da força. A região de interesse, mostrada na Figura 7.5, é um trapézio, portanto, o trabalho será

$$W_a^b = \frac{(-ka - kb)(b - a)}{2} = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kb^2 \quad (7.20)$$

que, obviamente, é igual ao obtido pela integração (equação 7.19). É importante ressaltar que, ao determinarmos o trabalho de uma força variável por meio do cálculo da área da curva da força em função da posição, vemos que a área pode ter valor tanto positivo como negativo, dependendo do valor da força e do sentido do cálculo do trabalho. Se, por exemplo, estivéssemos determinando o trabalho com a partícula indo de $x = b$ até $x = a$, obteríamos o resultado simétrico, ou seja, $1/2 k b^2 - 1/2 k a^2$.

A seguir, aplicaremos esse resultado no estudo do movimento de uma partícula submetida a uma força elástica, por meio de diversos exemplos.

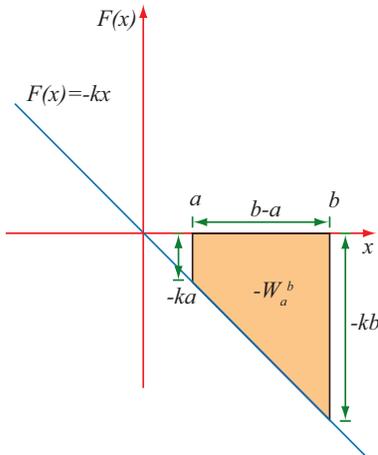


Figura 7.5: Cálculo do trabalho de uma força elástica.

Exemplo 7.3

Um bloco de massa m está preso a uma mola de constante elástica k , a qual tem a outra extremidade presa a uma parede fixa. O bloco pode deslizar sem atrito sobre uma superfície plana. Em um determinado instante, o bloco está passando pela posição de equilíbrio da mola, com uma velocidade v_0 , com o sentido mostrado na Figura 7.6. Determine L , a distensão máxima da mola em relação à posição de equilíbrio.

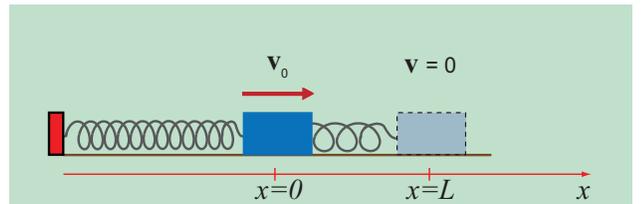


Figura 7.6: Um bloco preso a uma mola.

Solução: a distensão máxima da mola ocorrerá quando o bloco parar. A partir desse ponto, ela muda o sentido do movimento. Portanto, uma vez que a força resultante sobre a mola é a força elástica, podemos escrever, baseados no teorema do trabalho-energia,

$$\begin{aligned} W_0^L &= \int_0^L (-kx) dx = \frac{1}{2}k0^2 - \frac{1}{2}kL^2 \\ &= \Delta K = \frac{1}{2}m0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned} \quad (7.21)$$

ou seja:

$$L = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \quad (7.22)$$

O cálculo do trabalho desse problema poderia ser obtido também calculando-se a área sob a curva. Como mostra a Figura 7.5, a área de interesse é a área do triângulo entre $x = 0$ e $x = L$. Essa área é negativa, pois os valores da força no trecho considerado são sempre negativos (apontam no sentido contrário ao do deslocamento, que é adotado como positivo), ou seja:

$$W = \frac{1}{2}L \times (-kL) = -\frac{1}{2}kL^2$$

que é igual ao da integral 7.21. Atente para o problema inverso: qual é a velocidade do bloco ao passar pela posição de equilíbrio, se distendemos a mola de um comprimento L e a largamos a partir do repouso?

A solução seria totalmente análoga, ou seja:

$$W_L^0 = \int_L^0 (-kx) dx = \frac{1}{2}kL^2 = \Delta K = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Portanto,

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} L$$

Exemplo 7.4

Um objeto de massa m , preso a uma mola de comprimento L e constante elástica k , é segurado por uma pessoa em sua outra extremidade. Em uma primeira situação, a pessoa que segura a mola deixa o objeto se deslocar da posição de repouso da mola sem nenhum peso, retardando seu movimento com a mão, de modo a fazê-lo atingir o repouso. A distância entre a posição de equilíbrio da mola e a posição em que o objeto permanece em repouso é igual a h_1 , como

mostra a Figura 7.7a. Em uma segunda situação, no lugar de segurar o objeto até atingir o repouso, como na situação anterior, a pessoa libera o objeto deixando-o se deslocar livremente para baixo, atingindo a distância máxima h_2 em relação à posição de equilíbrio da mola, como mostra a Figura 7.7b, e efetuando um movimento oscilatório. Determine a razão entre h_1 e h_2 .

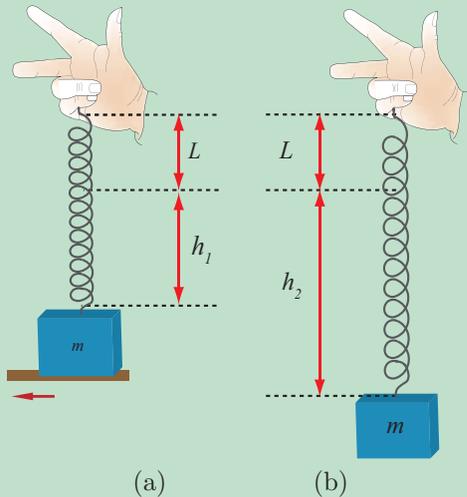


Figura 7.7: Um objeto preso a uma mola.

Solução: em primeiro lugar, devemos observar que, se o objeto está em repouso, a força da mola deverá anular o peso do objeto, ou seja:

$$-k(-h_1) - mg = 0$$

Portanto,

$$h_1 = \frac{mg}{k}$$

Para determinar h_2 , devemos observar que o objeto estará executando um movimento sob a ação de seu peso e da força da mola, sem qualquer outra interferência. Ao chegar à elongação máxima da mola, igual a h_2 , o objeto terá velocidade igual a zero, tendo também sido abandonado com velocidade nula. Portanto, a variação da energia cinética será nula. Logo, podemos escrever:

$$W_0^{-h_2} = \int_0^{-h_2} (-mg - kx) dx = \Delta K = 0$$

o que resulta em:

$$mgh_2 - \frac{1}{2}kh_2^2 = 0$$

Portanto,

$$h_2 = \frac{2mg}{k}$$

ou seja,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 7.5

Suponha, que na situação do exemplo 3, o bloco tenha a massa $m = 1 \text{ kg}$, velocidade $v_0 = 1 \text{ m/s}$ e constante elástica $k = 10 \text{ N/m}$. Suponha também que o coeficiente de atrito dinâmico μ entre o bloco e a superfície onde ele se apoia seja igual a $0,3$. Determine a elongação máxima L da mola, nessa situação.

Solução: a diferença para o exemplo 3 é que, além da força da mola, existe também a força de atrito entre o bloco e a superfície. A equação do teorema trabalho-energia fica

$$\begin{aligned} W_0^L &= \int_0^L (-\mu mg - kx) dx = -\mu mgL - \frac{1}{2}kL^2 \\ &= \Delta K = -\frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned}$$

que corresponde a uma equação de segundo grau:

$$\frac{1}{2}kL^2 + \mu mgL - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$$

cujas soluções são:

$$L = -\frac{\mu mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + \frac{m}{k}v_0^2} \quad (7.23)$$

de onde devemos tomar a raiz com o radical positivo, pois $L > 0$. Observe também que, se fizemos $\mu = 0$ nesse resultado, obteremos o mesmo resultado do exemplo 3. Substituindo os valores fornecidos no problema na equação 7.23, teremos:

$$\begin{aligned} L &= \frac{-0,3 \times 1,0 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10 \frac{\text{N}}{\text{m}}} + \\ &\sqrt{\left(\frac{0,3 \times 1,0 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10 \frac{\text{N}}{\text{m}}}\right)^2 + \frac{1,0 \text{ kg} \times 1 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{10 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \\ &= 0,14 \text{ m} \end{aligned}$$

Se não houvesse atrito, como no exemplo 3, a elongação máxima da mola seria de $L = 0,31 \text{ m}$.

7.5 Teorema do Trabalho-Energia Cinética em Duas e Três Dimensões

Até o momento, utilizamos o teorema do trabalho-energia cinética apenas no contexto de movimento em uma dimensão. Para que esse método tenha aplicação geral, é necessário estendermos esse teorema para uma trajetória geral, curva, em um plano ou no espaço em três dimensões. Precisamos cunhar uma definição de trabalho que seja adequada a trajetórias curvas e que, é claro, atenda ao teorema do trabalho-energia cinética. Começemos, então, analisando um movimento curvilíneo bastante conhecido: o movimento circular uniforme (ver Capítulo 4, seção 4.6). Nesse tipo de movi-

mento, uma partícula percorre uma trajetória circular com velocidade angular constante, o que faz com que o módulo de sua velocidade escalar também seja constante. A Figura 7.8 mostra uma partícula executando um movimento desse tipo. Na figura, estão representados os vetores velocidade e força que atuam sobre a partícula. Como vimos no Capítulo 6 (seção 6.6), esse movimento é realizado com uma força centrípeta, que é sempre perpendicular à trajetória, o que resulta na alteração apenas da direção do vetor velocidade, sendo seu módulo mantido constante durante todo o movimento. Portanto, no movimento circular uniforme, a energia cinética é constante. No contexto do movimento em uma dimensão, isso só seria possível se a força resultante fosse nula ou se o trabalho da força resultante fosse nulo.

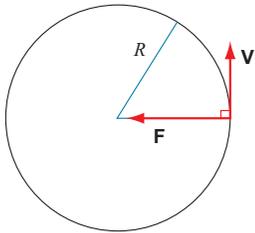


Figura 7.8: Partícula em movimento circular uniforme.

Essas características devem, portanto, fazer parte da definição de trabalho, garantindo que o trabalho de uma força perpendicular à trajetória seja nulo. No caso mais geral, em que a força \mathbf{F} faz um ângulo θ com o deslocamento Δr (Figura 7.9), a definição de trabalho da força \mathbf{F} é dada pelo produto escalar entre a força e do deslocamento, ou:

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = |\mathbf{F}| |\Delta \mathbf{r}| \cos \theta = F \Delta r \cos \theta \quad (7.24)$$

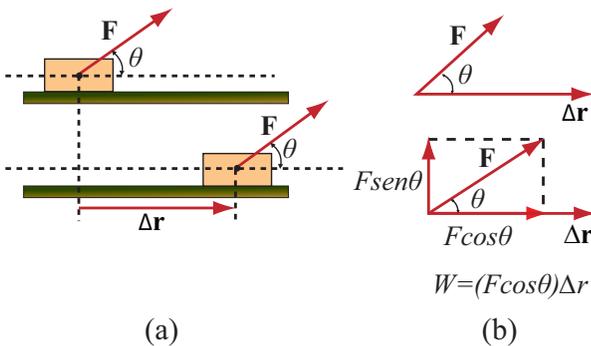


Figura 7.9: (a) Força \mathbf{F} movendo um bloco; (b) Decomposição da força \mathbf{F} em componentes na direção do deslocamento e perpendicular ao deslocamento.

A figura ?? ilustra uma força \mathbf{F} atuando sobre um bloco e deslocando-o de uma distância Δr . O produto

escalar da força com o deslocamento (Figura 7.9b) mostra que apenas o componente da força na direção do movimento ($F \cos \theta$) realiza trabalho, como pode ser conferido pela equação 7.24. O componente perpendicular ao movimento ($F \sin \theta$) não realiza trabalho. É interessante observar também que o trabalho da força \mathbf{F} representado na Figura 7.9 não depende da massa e não considera a velocidade, ou sua aceleração, mas apenas o produto da força pelo deslocamento.

Em uma situação mais geral, tanto a força quanto o deslocamento variam com a posição. Analisando um trecho suficientemente pequeno de uma trajetória curvilínea, de modo a podermos considerar a força constante no intervalo, podemos escrever para o intervalo Δr_i atuando uma força \mathbf{F}_i

$$\Delta W = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$$

Esse produto escalar produz um resultado semelhante ao da equação 7.5, pois somente o componente na direção do movimento é considerado nesse produto. Seguindo o que foi feito para encontramos as equações do teorema trabalho-energia cinética, podemos escrever:

$$\Delta W = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} m v_{final}^2 - \frac{1}{2} m v_{inicial}^2 \quad (7.25)$$

onde $v_{inicial}$ e v_{final} são as velocidades inicial e final no intervalo Δr_i . O trabalho no intervalo completo seria então obtido pelo somatório:

$$W = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (7.26)$$

Como vimos anteriormente, essa é a definição de integral. Assim, podemos escrever:

$$W = \int dW = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (7.27)$$

$$W = \int_C dW = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} \int_a^b F_x dx = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

A Figura 7.10 exemplifica a divisão da trajetória da partícula em subintervalos, de modo a podermos realizar o somatório mostrado na equação 7.27. Nessa equação, a integral indicada envolve o produto escalar entre o vetor força e o vetor deslocamento. Na verdade, essa integral é definida pelo processo de limites efetuado para o somatório mostrado nessa equação, similar ao que fizemos anteriormente ver equações 7.11 e 7.13. Esse tipo de integral é chamada *integral de linha*.

Uma integral de linha deve ser calculada sobre uma determinada curva, especificada como C no símbolo de integral, para a qual estão definidos, a cada ponto, o vetor força e o ângulo entre o vetor força e o vetor

deslocamento. Está fora do escopo desse livro discutir a implementação desse tipo de cálculo, mas isso será feito na discussão de um exemplo ao fim desta seção.

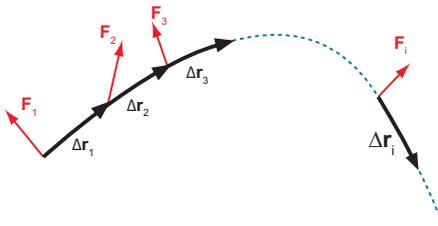


Figura 7.10: Divisão da trajetória em subintervalos.

Substituindo cada termo do somatório da equação 7.27 pela equação 7.25 e observando que só dois termos do somatório não se cancelarão, obteremos:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_{final}^2 - \frac{1}{2}mv_{inicial}^2 \quad (7.28)$$

(Teorema do trabalho-energia cinética
força variável em 3 dimensões)

O teorema foi estendido ao movimento de uma partícula sob a ação de uma força qualquer em três dimensões, pois os argumentos utilizados para curvas no plano valem também para curvas no espaço tridimensional. É interessante observar que, aplicando essa versão do teorema a problemas unidimensionais, recuperamos a forma mostrada na equação 7.17. Suponha que $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i}$, $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i}$ e que queiramos calcular o trabalho em uma linha reta, no eixo x , que une os pontos $x = a$ e $x = b$. Teremos :

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} \int_a^b F_x dx = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

Exemplo 7.6

Uma pequena esfera de massa m está presa à extremidade de uma haste leve, de comprimento l , que pode girar sem atrito em torno do ponto P , como mostra a Figura 7.11. A haste é largada, a partir do repouso, da posição horizontal, $\theta = 90^\circ$, como mostrado na figura. Determine a velocidade da esfera quando ela passa pelo ponto mais baixo da trajetória.

Solução: para resolver o problema, vamos recorrer à geometria mostrada na Figura 7.11. Primeiro, devemos observar que a força resultante sobre a partícula é a composição da força peso com a tração da haste sobre a partícula. Sabendo que a energia cinética inicial é nula e designando a velocidade final, no ponto O , como v_0 , podemos escrever a equação do teorema trabalho-energia como:

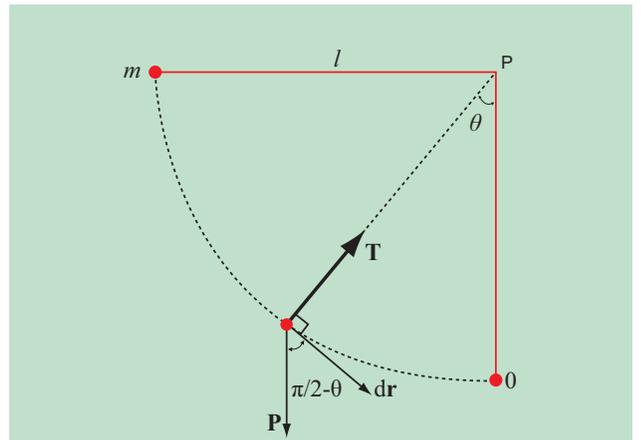


Figura 7.11: Uma esfera oscilando em torno de um ponto fixo.

$$W = \int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_C (\mathbf{T} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

onde \mathbf{T} é a tração na haste, \mathbf{P} é o peso da esfera e a curva C é o arco de círculo indicado na figura. Como mostra a figura, o vetor deslocamento $d\mathbf{r}$ é sempre tangente à trajetória, enquanto a tração da haste é sempre perpendicular a esta. Portanto, o produto escalar desses vetores é nulo. Como o peso da esfera é dado por $-mg\mathbf{j}$, o produto escalar entre \mathbf{P} e $d\mathbf{r}$ será dado por $mg |d\mathbf{r}| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = mg |d\mathbf{r}| \sin(\theta)$. Lembrando que $d\mathbf{r}$ é infinitesimal, seu módulo é igual ao comprimento de arco de círculo $|ld\theta| = -ld\theta$. O sinal negativo é porque o ângulo θ decresce ($d\theta$ é negativo). Então, o trabalho será dado por:

$$W = \int_C -mg \sin \theta d\theta = \int_{\pi/2}^0 -mg \sin \theta d\theta \quad (7.29)$$

$$= -mgl [-\cos \theta]_{\pi/2}^0 = mgl$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl$$

E, finalmente, teremos:

$$v_0 = \sqrt{2gl}$$

É interessante observar que o módulo da velocidade da esfera, no ponto mais baixo da trajetória, iguala-se ao módulo da velocidade que a esfera teria, se fosse largada em queda livre de uma altura l . De fato, a tração da haste não realiza trabalho, pois está sempre perpendicular à trajetória, restando apenas a força peso, ou, de outra forma, sendo sempre perpendicular à velocidade, não contribui para a alteração do seu módulo e, portanto, da sua energia cinética.

Outra forma de ver esse exemplo está mostrada na Figura 7.12. Podemos aproximar a trajetória circular por uma curva composta apenas por deslocamentos paralelos às direções x e y e indicadas na figura. No limite, quando Δx e

Δy tendem a zero, a curva coincide com o arco de círculo. Como o trabalho da tração é nulo (por ser perpendicular ao deslocamento), podemos considerar apenas o trabalho da força peso. Assim:

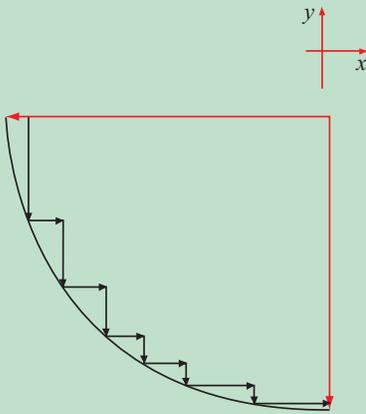


Figura 7.12: Aproximação da trajetória por deslocamentos paralelos às direções x e y.

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{P} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C (-mgy\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \int_0^{-l} (-mg)dy = mgl \end{aligned}$$

que é o mesmo valor obtido acima (equação 7.29).

Exemplo 7.7

A Figura 7.13 mostra um objeto de massa m , que pode deslizar sem atrito sobre a superfície indicada na figura, sem perder o contato com ela. Mostre que, conhecendo-se a velocidade v_A do objeto na posição A, de altura em relação ao solo h_A , é possível determinar a velocidade do objeto em qualquer outro ponto B da superfície, com altura h_B .

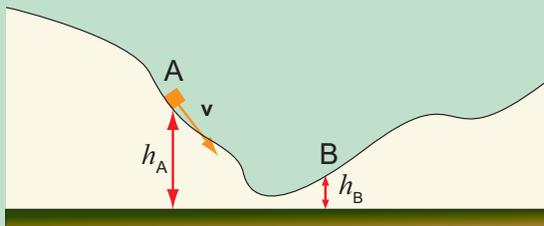


Figura 7.13: Um objeto deslizando, sem atrito, sobre uma superfície.

Solução: o primeiro passo para resolver esse exemplo é analisar as forças atuando sobre o objeto. Além do peso, está atuando apenas a força normal da superfície sobre o objeto, uma vez que não há atrito. A única força que realizará trabalho, então, será o peso do objeto, uma vez que a força normal é perpendicular à trajetória. Podemos, então, pro-

ceder como no exemplo anterior, onde decomposemos a trajetória em deslocamentos infinitesimais horizontais e verticais, chegando a:

$$W_A^B = -mg \int_A^B dy = -mg(h_B - h_A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

de onde se obtém a velocidade em B:

$$v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B) + v_A^2}$$

É interessante notar também que, reescrevendo a equação do teorema trabalho-energia, obtemos:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

Ou seja, aparentemente, existe uma grandeza, com dimensão de energia, que se conserva ao longo do movimento. Essa característica, aparentemente uma especificidade do exemplo discutido, é, na verdade, compartilhada por muitos sistemas físicos, incluída em um ramo muito especial da Física, as leis de conservação, que serão discutidas a partir da seção 7.8.

7.6 Potência

Nas seções anteriores, referimo-nos ao trabalho de uma força e à energia cinética sem fazer qualquer referência ao tempo. E quando, por exemplo, erguemos um objeto qualquer para colocá-lo em algum lugar, podemos fazê-lo com velocidades variadas, demorando mais ou menos tempo. O trabalho necessário para erguer esse objeto será sempre o mesmo, mas a taxa temporal com a qual o trabalho é realizado depende do tempo que demoramos para erguer o objeto.

Para levar em conta esse fato, devemos definir a taxa de variação do trabalho em relação ao tempo, que chamamos de **potência**. Assim, potência é definida como

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (\text{potência}) \quad (7.30)$$

Uma vez que a potência é a taxa de variação de trabalho, que tem dimensões de energia, é expressa em J/s, unidade que foi nomeada de Watt (W).

O Watt é uma unidade muito presente em nosso dia-a-dia, especificando geralmente a capacidade de fornecer energia a dispositivos elétricos, como lâmpadas, sistemas de amplificação de som, transmissores de rádio etc. Em nosso cotidiano, duas outras unidades de potência são utilizadas com bastante frequência, o *cavalo-vapor* (cv) (1 cv equivale a 735,5 W) e o *cavalo de força* (hp, do inglês *horsepower*) (1 hp equivale a 745,7 W), sendo ambas usadas na de-

signação da potência de motores. A utilização dessas unidades em vez do Watt deve-se ao fato de terem sido consagradas na caracterização do rendimento de automóveis, um bem muito apreciado em nossa sociedade.

Exemplo 7.8

Determine a potência média necessária para uma pessoa de 80,0 kg subir uma escada vertical, com velocidade constante, de maneira a elevar-se de 10,0 m em 30,0 s?

Solução: o trabalho necessário para a pessoa se elevar é o trabalho de uma força de valor da força peso, mas de sentido contrário, $F = mg$. Assim,

$$\begin{aligned} W &= F\Delta y = mgh \\ &= 80,0 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 10,0 \text{ m} = 78,5 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Portanto, a potência necessária será dada por:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{78,5 \text{ kJ}}{30,0 \text{ s}} = 262 \text{ W}$$

Observe que o trabalho da força peso tem o mesmo valor do trabalho realizado pela força F acima, mas com sinal contrário, de forma que o trabalho total é zero, o que é consistente com o teorema do trabalho-energia cinética, uma vez que a variação da energia cinética é nula nesse caso.

Nem sempre a potência é constante com o tempo, como no exemplo acima. No caso de a potência variar com o tempo, devemos utilizar a definição de potência instantânea

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad (\text{potência instantânea}) \quad (7.31)$$

A partir da definição de trabalho para força constante, podemos expressar a potência em função da velocidade

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (7.32)$$

E, a partir da definição de velocidade instantânea, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, podemos escrever a equação acima como:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta \quad (7.33)$$

Ou seja, a potência instantânea é dada pelo produto escalar da força pela velocidade na posição considerada.

Exemplo 7.9

Um carro compacto pode atingir uma potência máxima de 100 cv. (a) Admitindo-se que o carro pode manter uma velocidade de 144 km/h, usando a potência máxima do motor, determine o valor da força que impulsiona o carro. (b) No item (a), apesar de o carro estar submetido à força do motor (na verdade, à força de atrito que o chão exerce sobre os pneus, como você verá no Capítulo 10, ao discutirmos rolamento sem deslizamento), ele se move com velocidade constante, portanto sem aceleração. Discuta esse fato.

Solução:

(a) Para determinarmos o valor da força propulsora em uma dimensão, utilizamos a equação 7.32, considerando que a força está na mesma direção do movimento, ou seja, na direção de \mathbf{v} . Assim, o ângulo θ entre elas é zero, de forma que a potência é dada por

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta = Fv$$

Substituindo os valores fornecidos ($v = 144 \text{ km/h} = 40,0 \text{ m/s}$, e $P = 100 \text{ cv} = 73,55 \text{ kW}$), teremos:

$$P = F \cdot 40,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 73,6 \text{ kW}$$

Portanto,

$$F = 1,84 \text{ kN}$$

(b) A aplicação de força é necessária para contrabalançar os efeitos de forças dissipativas, como o arraste aerodinâmico (resistência do ar) e o atrito dos mancais. Na verdade, o trabalho líquido realizado sobre um automóvel em movimento com velocidade constante é nulo, sendo o trabalho da força propulsora anulado pelo trabalho das forças dissipativas, resultando em energia cinética constante e, portanto, velocidade constante.

7.7 Conservação da Energia em Uma Dimensão: Força Gravitacional e Força Elástica

Energia potencial e energia mecânica

Uma análise mais detalhada do exemplo 7.1, que estuda o movimento de uma partícula em queda livre, pode conduzir também a um resultado bem mais geral. Suponhamos que estamos analisando o problema da queda livre de uma partícula, lançada de uma altura h_1 , com velocidade inicial igual a v_0 . Podemos calcular sua velocidade, ou sua energia cinética, em outra altura qualquer h_2 . Para isso, utilizaremos o teorema do trabalho-energia cinética:

$$W_1^2 = (-mg)(h_2 - h_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - mv_1^2 \quad (7.34)$$

ou seja,

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

o que equivale a escrever

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \quad (7.35)$$

Como já antecipamos no exemplo 7.7, a grandeza física $\frac{1}{2}mv^2 + mgh$, onde v é a velocidade da partícula e h a sua altura em relação ao solo, apresenta um valor constante. Dito de outra maneira, essa grandeza se conserva para uma partícula na presença apenas da força gravitacional. Ao longo da queda da partícula (redução de sua altura), sua energia cinética aumenta e o valor de mgh diminui, mas a soma das duas grandezas permanece constante. Essa grandeza é conhecida como **energia mecânica**. A grandeza representada por mgh tem dimensão de energia. Como a energia cinética aumenta às expensas dessa grandeza, convencionou-se chamá-la de **energia potencial**, em uma referência ao potencial de transformar-se em energia cinética, ou seja, em movimento. Assim, podemos definir a energia potencial gravitacional como:

$$U_G = mgh \quad (\text{energia potencial gravitacional}) \quad (7.36)$$

onde foi arbitrariamente atribuído $U_G = 0$ para $h = 0$, uma vez que o que nos interessa é a diferença em energia entre duas posições. Quando, por exemplo, carregamos um objeto qualquer para o topo de um edifício, aumentando sua altura, estamos acumulando energia potencial. Ao largar esse objeto do topo do prédio, essa energia potencial acumulada transforma-se em energia cinética.

Uma imagem fisicamente mais esclarecedora desse processo é o lançamento de uma pedra para o alto, com velocidade v_0 dirigida para cima. Enquanto sobe, sua energia potencial gravitacional aumenta, enquanto sua energia cinética diminui (e, em consequência, sua velocidade), até chegar à altura máxima, onde sua energia cinética é nula (velocidade igual a zero) e sua energia potencial gravitacional é máxima.

A Figura 7.14 mostra esquematicamente esse processo, ilustrando as variações da energia cinética, da energia potencial gravitacional e a soma das duas, que é igual à energia mecânica. O diagrama apresentado será o mesmo, exceto pelo fato de o sentido da velocidade ser invertido, para uma pedra caindo de certa altura a partir do repouso.

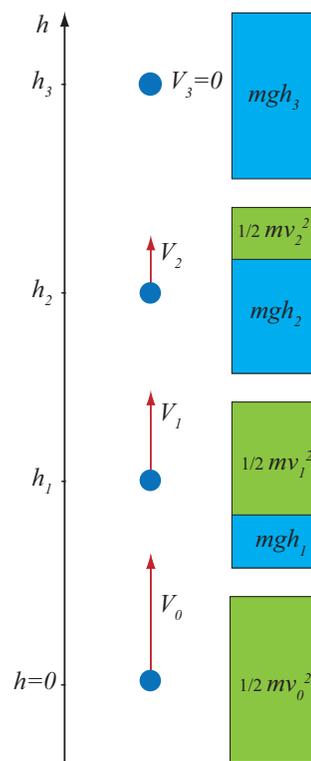


Figura 7.14: Variação da energia potencial gravitacional e da energia cinética de uma partícula lançada a partir do solo com velocidade v_0 , submetida apenas à força gravitacional.

Podemos adotar o mesmo raciocínio para o sistema massa-mola (Figura 7.6). Nesse caso, vamos considerar o teorema do trabalho-energia cinética aplicando-o a duas posições (elongações da mola) genéricas, designadas por x_1 e x_2 . Assim, o trabalho da força elástica será:

$$W_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (7.37)$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

uma equação que pode ser rearranjada como

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (7.38)$$

Novamente, a aplicação do teorema do trabalho-energia cinética conduz a uma lei de conservação. Nesse caso, a energia potencial é igual a $\frac{1}{2}kx^2$ (que será abordada com mais detalhes mais à frente). Como mencionado acima, a soma da energia potencial

U com a energia cinética K é definida como **energia mecânica**.

$$E = K + U \quad (\text{energia mecânica}) \quad (7.39)$$

Como vimos para o caso da força gravitacional e da força elástica, essa soma é constante. Entretanto, essa lei vale para outras forças, desde que elas sejam conservativas, que, em uma dimensão, são forças que dependem apenas da posição. Aparentemente, essa condição de a força depender apenas da posição traduz uma realidade puramente matemática. Para extrair um significado físico mais preciso dessa limitação, devemos lembrar das forças de atrito. Poderíamos, em uma primeira análise, concluir que a força de atrito atuando sobre um objeto que desliza sobre um plano rugoso seja constante e, portanto, incluída entre as forças dependentes da posição, como são as forças gravitacional e elástica. Todavia, como foi comentado, a força de atrito depende explicitamente do sentido da velocidade (do sinal da velocidade), que pode ser expresso como $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, sendo, portanto, a força de atrito uma força que não depende apenas da posição. Por isso, o teorema da conservação de energia não se aplica às forças de atrito. As forças dependentes apenas da posição, no movimento em uma dimensão, são denominadas **forças conservativas**, por serem compatíveis com a conservação da energia. Nos movimentos em duas e três dimensões, a condição necessária para a força ser conservativa não é a de depender apenas da posição, como será visto mais adiante.

Salto com vara

O salto com vara é um esporte em que o atleta salta um obstáculo utilizando uma vara para aumentar a altura alcançada. Para saltar com vara, existem técnicas especiais para se tirar o maior proveito da energia do atleta. Inicialmente, o atleta corre com a vara atingindo certa velocidade, portanto adquirindo energia cinética (Figura 7.15). No momento do salto, o atleta posiciona a vara em um canto e, devido à sua energia cinética, transfere parte dessa energia em energia potencial elástica para a vara, que se curva acumulando energia potencial (Figura 7.16a). A vara começa, então, a retomar sua posição de equilíbrio, transferindo a energia acumulada novamente em energia cinética e potencial, levantando o atleta em direção ao obstáculo a ser superado (Figura 7.16b).

Em um modelo simplificado, podemos imaginar que a energia cinética adquirida na corrida é transferida em energia potencial gravitacional na altura do obstáculo, estabelecendo, assim, a altura máxima possível (desprezando-se eventuais perdas). Assim, a energia cinética no momento do pulo seria:

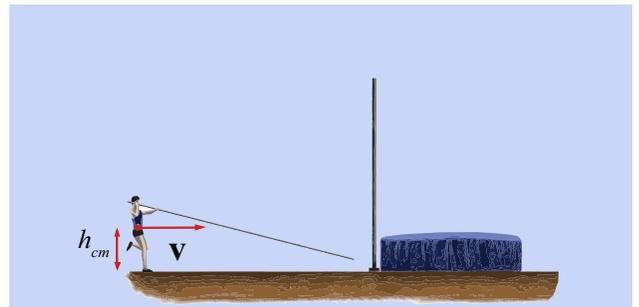


Figura 7.15: Atleta adquirindo energia cinética.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

A energia potencial, em relação ao centro de massa do atleta seria:

$$E_p = mgh$$

Igualando os dois termos, obtemos que a altura máxima possível em relação ao centro de massa do atleta:

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

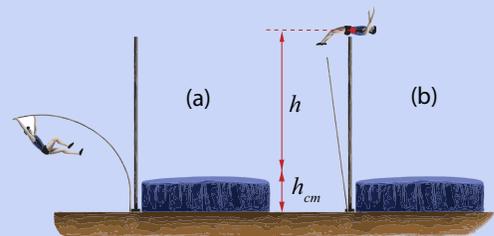


Figura 7.16: (a) Atleta iniciando o salto com vara e (b) atingindo a altura máxima.

Assim, a altura final (do centro de massa) atingida pelo atleta, H , será:

$$H = \frac{v^2}{2g} + h_{cm}$$

Para uma velocidade em torno de 10 m/s (que é um valor um pouco abaixo do máximo que o homem consegue atingir), $h_{cm} = 1\text{ m}$ e considerando $g \approx 10\text{ m/s}^2$, obtemos $H \approx 6\text{ m}$. O recorde mundial está um pouco acima de 6 m. Na prática, o atleta ainda pode acrescentar um pouco mais de energia a partir de sua força muscular, aumentando o envergamento da vara.

Teorema da conservação da energia mecânica em uma dimensão

Como vimos, o problema do movimento em uma dimensão para uma partícula submetida à força gra-

vitacional ou elástica nos leva a encontrar uma lei de conservação de energia, que pode ser utilizada para se resolver alguns problemas. Nessa seção, vamos estender essa lei de conservação para qualquer força conservativa (que será definida a seguir) em uma dimensão e não apenas para as forças gravitacional e elástica. Mais adiante, vamos estender esta lei para duas e três dimensões.

Vamos supor que a partícula está se movimentando entre as posições x_0 , x_1 e x_2 , sendo x_0 uma posição arbitrária, mas fixa, e x_1 e x_2 duas posições quaisquer no eixo x , e que, durante esse movimento, a partícula está submetida a uma força $F(x)$ conhecida. Podemos representar o trabalho realizado entre x_0 e x_2 como:

$$W_{x_0}^{x_2} = \int_{x_0}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \quad (7.40)$$

Aplicando o teorema do trabalho-energia cinética ao trecho entre x_1 e x_2 , temos:

$$\int_{x_0}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (7.41)$$

que pode ser escrita na forma:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \int_{x_0}^{x_2} F(x)dx \quad (7.42)$$

equação que, mais uma vez, representa a lei de conservação da energia. Na equação 7.41, em ambos os lados da igualdade, podemos fazer a seguinte substituição:

$$U(x) = -W_{x_0}^x = - \int_{x_0}^x F(x)dx \quad (7.43)$$

e chamar $U(x)$ de energia potencial, desde que a força seja conservativa. Podemos então escrever:

$$K_1 + U(x_1) = K_2 + U(x_2) = E_M \quad (7.44)$$

A equação 7.44 estabelece uma lei de conservação para a soma da energia cinética com a energia potencial, que já foi denominada energia mecânica, de forma que podemos enunciar essa lei como:

Teorema da conservação da energia mecânica:

A energia mecânica de uma partícula, $E = K + U$, se conserva, se ela estiver submetida a uma força resultante conservativa.

Um resultado adicional dessa formulação é a relação entre força e energia potencial. Como vimos no caso da força gravitacional e da força elástica, podemos escrever

$$- \int_{x_0}^x F(x)dx = U(x) - U(x_0) = \Delta U \quad (7.45)$$

ou

$$\Delta U = U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F(x)dx \quad (7.46)$$

(energia potencial em uma dimensão)

Pela definição de integral definida, podemos escrever

$$dU = -F(x)dx$$

e, a partir daí, obter a força:

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx} \quad (7.47)$$

7.8 O Sistema Massa-Mola em Detalhe

Como um exemplo de aplicação da conservação da energia em uma dimensão, estudaremos o sistema massa-mola com mais detalhes, introduzindo a conservação da energia mecânica. Podemos calcular a energia potencial do sistema massa-mola, uma vez que conhecemos a dependência da força elástica com a posição, que é dada pela equação 7.18. O primeiro passo é escolhermos a origem para a qual atribuiremos uma energia potencial nula. O bom senso nos leva a escolher a posição $x = 0$ como origem, mas deve-se lembrar que essa escolha é arbitrária. Podemos escolher qualquer posição como origem do potencial (mais adiante, isso será verificado). Assim, a energia potencial será dada por:

$$U(x) = - \int_0^x (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2 \quad (7.48)$$

(energia potencial elástica)

A curva de energia potencial em função da posição, uma parábola, como poder vista pela equação 7.48, está representada na Figura 7.17.

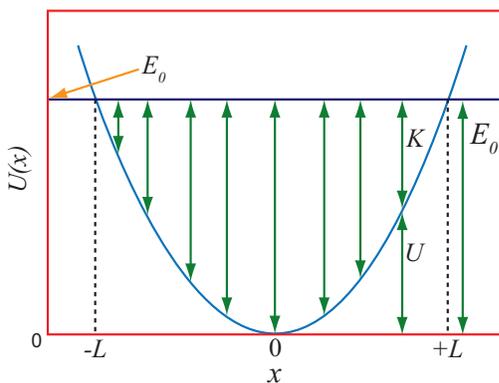


Figura 7.17: Análise do sistema massa-mola usando a curva de energia potencial.

Podemos analisar o movimento da massa presa à mola utilizando apenas o gráfico da energia potencial. Para tanto, devemos fixar o valor da energia mecânica, E_0 , que está assinalado no gráfico da Figura 7.17. A primeira observação que podemos fazer, analisando o gráfico, é que existe uma região onde é possível à partícula se movimentar. Uma vez que $E_0 = U + K$, temos:

$$K = E_0 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \tag{7.49}$$

ou seja, o movimento está restrito à região em que a energia potencial é menor ou igual à energia mecânica, pois a energia cinética não pode ter valores negativos. A energia cinética do sistema massa-mola também está representada em algumas posições na Figura 5.16, na região onde o movimento da partícula é possível. Por meio do gráfico de energia potencial, podemos observar também que a energia cinética aumenta quando a partícula se aproxima de $x = 0$ e se anula quando $U = E_0$. Esses pontos de anulação da energia cinética correspondem às elongações máximas da mola, representados no gráfico por $x = \pm L$.

Analisando o gráfico, podemos também estabelecer a sequência do movimento da partícula ao atingir $x = \pm L$. Para tanto, basta verificar o sentido da força atuando sobre ela. Uma vez que a partícula está em repouso momentâneo, ela se movimentará na direção em que a força está apontando. Em $x = -L$, por exemplo, a derivada dU/dx da energia potencial é negativa, como mostra a figura. Portanto, a força sobre a partícula, nessa posição, apontará para a direita (sentido positivo, uma vez que $F = -dU/dx$), sentido para o qual a partícula se movimentará quando atingir esse ponto.

Antes de atingir o ponto $x = -L$, a partícula estava se movimentando no sentido oposto. Essa análise também é válida para o ponto $x = L$. A partícula, antes de alcançá-lo, terá velocidade positiva. Como a força é negativa nesse ponto ($dU/dx > 0$), a partícula se movimentará no sentido negativo, após atingir $x = L$. Por

isso, os pontos $x = \pm L$ são denominados *pontos de retorno* do movimento.

A análise gráfica do sistema massa-mola a partir da curva de energia potencial nos conduz ao fato de que a partícula no sistema massa-mola estará oscilando periodicamente entre $-L$ e $+L$, com a energia cinética atingindo o valor máximo em $x = 0$. Apenas para complementar, podemos obter, a partir da equação da conservação da energia mecânica (o leitor deverá verificar esses resultados, como exercício), os valores da elongação L e da velocidade máxima (em $x = 0$)

$$L = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$$

É importante observar que essa forma de discutir o movimento, por meio do gráfico da energia potencial, não se restringe ao estudo do sistema massa-mola. Na Figura 7.18, está mostrado um gráfico de energia potencial genérico de uma partícula. Se a energia mecânica da partícula for igual à energia E_0 assinalada no gráfico, a situação física guarda fortes analogias com o sistema massa-mola, apesar de a forma da curva de energia potencial ser diferente. Analisando o gráfico, podemos identificar a região em que a partícula pode se mover entre x_{min} e x_{max} , os pontos de retorno desse movimento. Pode-se afirmar que a partícula estará oscilando, confinada entre x_{min} e x_{max} .

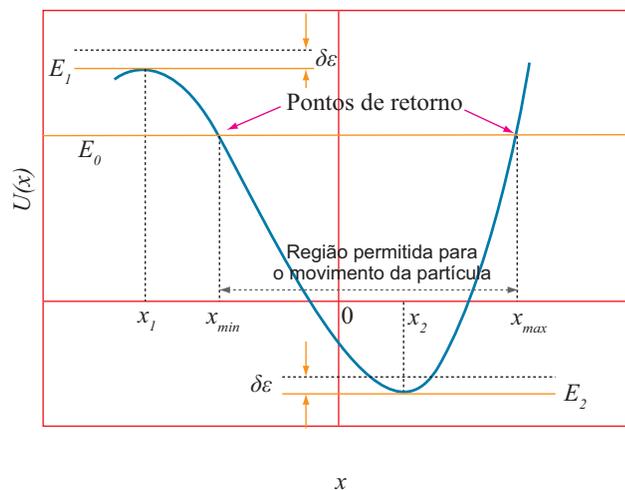


Figura 7.18: Curva de energia potencial genérica.

O gráfico da Figura 7.18 nos permite observar dois outros pontos característicos em curvas de energia potencial. Primeiramente, observamos que, se a energia mecânica da partícula for igual a E_1 ou E_2 , a partícula estará em repouso, pois sua energia cinética será nula, e a força atuando sobre a partícula é nula. A força será nula, pois, nas localizações em que se encontra a partícula em cada uma das duas situações, a energia potencial apresenta um ponto extremo - ponto de

máximo em x_1 ($E = E_1$) e ponto de mínimo em x_2 ($E = E_2$). Como a derivada dU/dx é nula em pontos de máximo e de mínimo, as forças nessas posições serão nulas. Como a partícula em ambos os casos estará em repouso, esses pontos são denominados pontos de equilíbrio. No caso de um ponto de mínimo, o ponto de equilíbrio é designado como estável, uma vez que, se aumentarmos de um valor muito pequeno a energia da partícula (no caso $E = E_2 + \delta E$), a partícula se movimentará em torno do ponto de mínimo (Figura 7.18). No caso de um ponto de máximo, o ponto de equilíbrio é designado como instável, uma vez que, se aumentarmos a energia de um valor pequeno ($E = E_1 + \delta E$), a partícula tenderá a afastar-se de $x = x_1$. O assunto de equilíbrio será estudado com mais detalhes no Capítulo 12.

Exemplo 7.10

Um bloco de massa $m = 1,0\text{ kg}$ oscila sobre o plano horizontal, preso a uma mola de constante elástica $k = 85\text{ N/m}$ e deslizando sem atrito. Quando ele está a uma distância de 10 cm do comprimento relaxado da mola, sua velocidade é igual a $3,4\text{ m/s}$. Determine (a) a velocidade com que o bloco passa pela posição correspondente ao comprimento relaxado da mola e (b) a elongação máxima da mola.

Solução:

(a) Supondo que o comprimento relaxado da mola faz o bloco situar-se na posição $x = 0$ e adotando esse ponto como origem da energia potencial, podemos calcular a energia mecânica do bloco, uma vez que conhecemos a velocidade do bloco na posição $x = 0,10\text{ m}$.

$$E_M = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 0,5 \times 85 \times (0,1)^2 + 0,5 \times 1 \times (3,4)^2 = 0,425 + 5,78 \cong 6,2\text{ J}$$

No comprimento relaxado, a energia potencial elástica é nula e, em consequência, a energia cinética nesse ponto é dada por:

$$K = E_M = 6,2\text{ J}$$

A velocidade então será:

$$v = \sqrt{\frac{2E_M}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,2}{1,0}} \cong 3,5\text{ m/s}$$

(b) Uma vez que, na elongação máxima, a velocidade é zero, a elongação máxima será dada por:

$$L = \sqrt{\frac{2E_M}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,2}{85}} = 0,38\text{ m} = 38\text{ cm}$$

7.9 Conservação da Energia em Duas e Três Dimensões

No exemplo 7, que considera um objeto deslizando sem atrito, chegamos, por meio da aplicação do teo-

rema do trabalho-energia cinética, a uma equação em tudo semelhante à da conservação da energia mecânica para uma partícula em queda livre. Essa semelhança não é casual, tem a ver com o fato de que o trabalho realizado sobre uma partícula submetida à força gravitacional (além da força normal, que é perpendicular à trajetória e, portanto, não realiza trabalho) não depende do caminho utilizado para calcular esse trabalho, dependendo apenas das posições inicial e final. A seguir, mostraremos que essa independência do trabalho em relação ao caminho utilizado para o cálculo é a propriedade que define uma força conservativa em duas e três dimensões. Nossa discussão será restrita a duas dimensões, mas o leitor poderá facilmente generalizá-la para três dimensões.

Imagine que, em uma dada região, uma partícula é submetida à ação de uma força $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ que depende apenas da posição \mathbf{r} e é conservativa, ou seja, o trabalho não depende da trajetória utilizada. Calculemos, então, o trabalho entre as posições O e B, quando uma partícula percorre o caminho 1 (que contém o ponto A) ou o caminho 2, como mostra a Figura 7.19. Podemos exprimir o trabalho entre as posições O e B da seguinte forma:

$$W_1 = W_2$$

ou

$$\left[\int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right]_{\text{caminho 1}} = \left[\int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right]_{\text{caminho 2}}$$

Como o ponto A pertence ao caminho 1, a integral da esquerda pode ser reescrita como:

$$\left[\int_O^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right]_{\text{caminho 1}} = \left[\int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right]_{\text{caminho 2}}$$

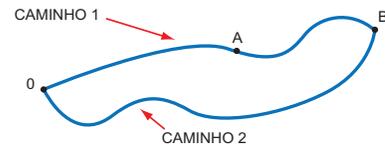


Figura 7.19: Dois caminhos para o cálculo do trabalho de uma força conservativa.

Como a força da qual está se calculando o trabalho é a força resultante, podemos aplicar o teorema do trabalho e energia cinética:

$$\int_O^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + K_B - K_A = \int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.50)$$

onde dispensamos a designação dos caminhos para o cálculo do trabalho nos trechos OA e OB, por tratar-se de uma força conservativa. Agrupando os termos referentes a A e B, temos:

$$-\int_O^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + K_A = -\int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + K_B \quad (7.51)$$

Se agora designarmos $-\int_O^X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ por U_r , ou energia potencial no ponto \mathbf{r} , teremos a equação que expressa a lei da conservação da energia mecânica:

$$U_A + K_A = U_B + K_B \quad (7.52)$$

É importante ressaltar que partimos tão somente do fato de que o trabalho da força não dependia do caminho. Essa é uma formulação idêntica à que estudamos no caso da conservação da energia em uma dimensão, exceto pela introdução da propriedade de forças conservativas.

Podemos, então, estabelecer o teorema da conservação da energia mecânica para o movimento de uma partícula em duas ou três dimensões. Inicialmente, vamos definir uma força conservativa:

Força conservativa: Uma força é conservativa se o trabalho que ela realiza em uma partícula não depende do caminho. Isto é, uma força é conservativa quando o trabalho sobre uma partícula que percorre qualquer trajetória fechada é nulo.

A equivalência entre essas duas definições pode ser aferida com base na análise da Figura 7.19, quando calculamos o trabalho de O até B pelo caminho 1 e o trabalho de B até O pelo caminho 2. Como o trabalho não depende do caminho ao trabalho determinado, ao percorrer o caminho 1, $[W_O^B]_{\text{caminho 1}}$, terá o mesmo módulo e o sinal invertido, em relação o trabalho determinado, ao percorrer o caminho 2, $[W_B^O]_{\text{caminho 2}}$. O trabalho ao percorrer toda a trajetória de O a B pelo caminho 1, retornando a O pelo caminho 2, será:

$$W_{\text{trajetória fechada}} = [W_O^B]_{\text{caminho 1}} + [W_B^O]_{\text{caminho 2}} = 0$$

equação que, explicitada em termos da definição de trabalho, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[\int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right]_{\text{caminho 1}} + \left[\int_B^O \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right]_{\text{caminho 2}} = 0$$

onde o símbolo \oint indica uma integral em uma trajetória fechada.

Para enunciarmos o teorema da conservação da energia, precisamos ainda definir a energia potencial que corresponde ao simétrico do trabalho de uma força calculado entre uma origem arbitrária r_0 e um ponto qualquer r do espaço.

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{energia potencial}) \quad (7.53)$$

A energia potencial é uma forma de energia armazenada que pode ser totalmente convertida em outra forma de energia. Quando forças não conservativas agem em um sistema (como a força de atrito), não é possível recuperar toda a energia potencial, transformando-a em energia cinética. Assim, a energia potencial só é definida para forças conservativas.

Podemos, agora, definir o teorema da conservação da energia:

Teorema da Conservação da Energia: Se uma força é conservativa, sua energia mecânica, que é a soma das energias cinética e potencial, se conserva.

Ou seja, se $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ então

$$U(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}mv^2 = E = \text{constante} \quad (7.54)$$

(conservação da energia mecânica)

Nota importante: No caso unidimensional, uma força conservativa equivale a uma força que depende apenas da posição, mas essa definição é equivalente ao trabalho não depender do caminho. Podemos mostrar isso calculando o trabalho em uma dimensão de uma força $F(x)$ entre duas posições x_1 e x_2 ($x_1 > x_2$), usando dois caminhos diferentes. O primeiro sendo o segmento que liga x_1 a x_2 e o segundo dividido em dois segmentos, o primeiro de x_1 a $x_3 > x_2$, passando por x_2 , e o segundo diretamente de x_3 a x_2 . Calculando o trabalho, temos:

$$\begin{aligned} W_{\text{caminho 1}} &= \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \\ W_{\text{caminho 2}} &= \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} F(x)dx + \int_{x_3}^{x_2} F(x)dx \end{aligned} \quad (7.55)$$

No cálculo do trabalho utilizando o caminho 2, as duas últimas integrais se cancelam, por terem o mesmo integrando e limites idênticos e invertidos. Portanto, no caso de uma partícula movimentando-se em

uma dimensão, submetida a uma força que só depende da posição $F(x)$, o trabalho dessa força calculado entre dois pontos não depende do caminho utilizado no cálculo.

A conservação da energia e o pêndulo

Podemos estudar o movimento de um pêndulo utilizando a conservação da energia. A base dessa discussão já foi realizada no exemplo 7.6, que trata do movimento de uma haste leve de comprimento l , que pode girar livremente em torno de uma das extremidades, com uma partícula de massa m presa à outra extremidade, como mostra a Figura 7.11.

Calculemos a velocidade da massa m , em qualquer posição do pêndulo, quando ele é largado a partir da posição horizontal, como mostra a Figura 7.11. Para utilizarmos a conservação da energia para resolver o problema, devemos escolher a origem da energia potencial. Podemos adotar como origem o ponto mais baixo da trajetória do pêndulo, o ponto O da figura, que corresponde ao ângulo $\theta = 0$ das Figuras 7.11 e 7.12. Usando os cálculos antecipados no exemplo 6, $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int -mgl \sin \theta d\theta$, podemos determinar a energia potencial para o problema:

$$U(\theta) = - \int_0^\theta -mgl \sin \theta d\theta = -mgl [\cos \theta]_0^\theta \quad (7.56)$$

$$= mgl [1 - \cos \theta] = mgy$$

onde y é a altura em relação ao ponto O. Podemos, então, determinar a velocidade de qualquer ponto a partir da posição dada pela altura em relação a O, ou pelo ângulo θ , sabendo que sua energia mecânica, que é constante durante todo o movimento, equivale à energia potencial no ponto de lançamento do pêndulo, uma vez que este foi largado a partir do repouso:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgl$$

Portanto, a velocidade da massa m é descrita por:

$$v = \sqrt{2g(l - y)}$$

ou, em função do ângulo θ :

$$v = \sqrt{2lg \cos \theta}$$

Obviamente, para o ponto mais baixo da trajetória, obtemos o mesmo valor $v = \sqrt{2gl}$ que obtivemos no exemplo 6.

Exemplo 7.11

Uma partícula de massa m está presa a um fio de comprimento l fixado em uma das extremidades ao ponto O, como mostrado na Figura 7.20. Se a massa é largada do repouso quando o fio faz um ângulo de 30° com a horizontal, determine a tensão no fio quando a massa passa pelo ponto mais baixo da trajetória.

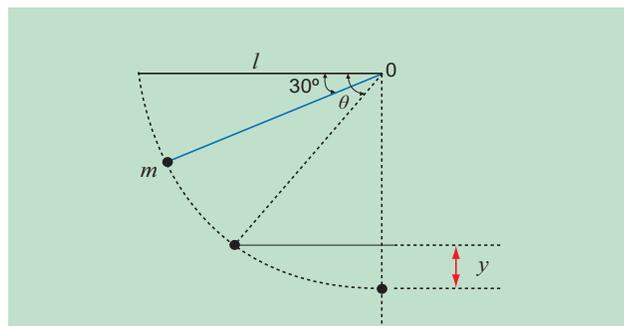


Figura 7.20: Uma partícula presa por um fio fixo em um ponto.

Solução: quando a massa passa pelo ponto mais baixo da trajetória, a força resultante sobre ela estará na direção vertical, com módulo igual a $T - mg$, onde T é a tensão no fio. Como a massa realiza um movimento circular, o componente da força resultante na direção radial deve ser igual à força centrípeta, portanto:

$$T - mg = F_C = \frac{mv^2}{l}$$

Podemos, utilizando a conservação da energia, calcular mv^2 para utilizar na equação acima. Para tanto, devemos calcular a energia mecânica da massa, tomando como origem da energia potencial, por exemplo, o ponto mais baixo da trajetória. Assim,

$$E = mgl(1 - \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{mgl}{2}$$

Na posição mais baixa da trajetória, a energia potencial é nula, de modo que podemos escrever:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{mgl}{2} \quad \text{e} \quad mv^2 = mgl$$

Assim, a tensão no fio será dada por:

$$T = \frac{mv^2}{l} + mg = \frac{mgl}{l} + mg = 2mg$$

Partícula na presença de força gravitacional e na ausência de forças de atrito

No exemplo 7, foi mostrado que uma partícula submetida apenas à força de gravidade (além da força normal, que é perpendicular à trajetória e, portanto, não realiza trabalho) atende à conservação da energia mecânica. Essa característica permite discutirmos problemas físicos de interesse prático, como o descrito no exemplo a seguir.

Exemplo 7.12

Um vagão em um parque de diversões pode se movimentar preso a um trilho, na ausência de atrito. Em uma determinada etapa do trajeto do vagão, ele é largado de uma altura h , movendo-se em direção a um *looping* circular de raio R ,

como mostra a Figura 7.21 Determine a altura h mínima para que o vagão execute a volta completa no *looping*.

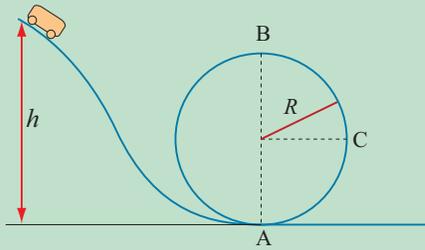


Figura 7.21: Um vagão em um *looping* de um parque de diversões.

Solução: em primeiro lugar, devemos definir qual é a condição física a ser observada para que o vagão dê uma volta completa no *looping*. Pode ser mostrado que isso equivale a dizer que o vagão não perderá o contato até atingir o topo do *looping*, onde a força normal será nula. Sendo assim, a força resultante sobre o vagão, nesse ponto, é seu peso. Como o vagão está executando uma trajetória circular, a força centrípeta agindo sobre ele deverá ser igual ao peso, uma vez que não há atrito, ou seja:

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = mg$$

de onde podemos obter a energia cinética do vagão no ponto B como:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgR}{2} \quad (7.57)$$

Escolhendo o ponto A como o nível zero da energia potencial e utilizando a energia cinética dada pela equação 7.57, a energia mecânica do vagão no ponto B será dada por:

$$E = K + U = \frac{mgR}{2} + 2mgR = \frac{5mgR}{2} \quad (7.58)$$

No ponto de lançamento, a energia cinética é nula. Igualando a energia mecânica no ponto de lançamento, $E = mgh$, e no ponto mais alto do *looping* (equação 7.58), teremos:

$$mgh = \frac{5mgR}{2}$$

Finalmente, encontramos a altura mínima para o lançamento:

$$h = \frac{5R}{2}$$

mola que, por sua vez, tem sua outra extremidade ligada a uma parede fixa. Suponha que, em um dado instante, o bloco está passando na posição correspondente ao comprimento relaxado da mola, com velocidade igual a v_{final} , deslizando sobre uma superfície rugosa com coeficiente de atrito cinético μ , depois de ter sido lançado de $x = d$ com velocidade v_0 . Podemos aplicar o teorema do trabalho-energia cinética, entre o instante inicial e após o bloco percorrer a distância d da seguinte forma:

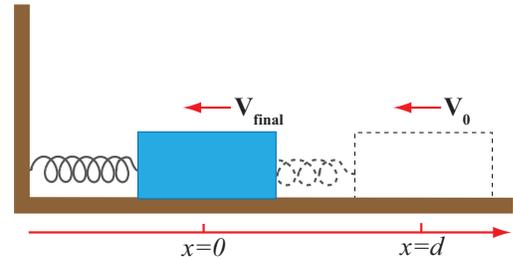


Figura 7.22: Sistema massa-mola com atrito.

$$\begin{aligned} W &= \int_d^0 [(-kx) - \mu mg] dx = \frac{1}{2}kd^2 + \mu mgd \\ &= \frac{1}{2}mv_{final}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned}$$

Reagrupando os termos, temos:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_{final}^2 - \mu mgd$$

O membro ao lado esquerdo da igualdade na equação é a energia mecânica do bloco ao ser lançado, ou seja, é a soma da energia potencial relativa à força conservativa que está agindo sobre o bloco na posição $x = d$, com a energia cinética naquela posição. Se a energia mecânica se conservasse, seu valor deveria ser igual a $\frac{1}{2}mv_{final}^2$ (pois em $x = 0$ a energia potencial é nula). Entretanto, o valor obtido, considerando a força de atrito, é igual a $\frac{1}{2}mv_{final}^2 - \mu mgd$, ou seja, igual ao valor da energia mecânica final mais o trabalho da força de atrito, que é sempre negativo. Assim, na presença de forças de atrito, a energia mecânica de uma partícula *sempre* diminui.

Consideremos o exemplo acima de maneira mais formal para uma partícula se movimentando em uma dimensão sob a ação de uma força que é a soma de uma força conservativa F_{cons} com uma força de atrito F_{atrito} . Aplicando, para essa situação, o teorema do trabalho-energia cinética entre duas posições, x_{final} e $x_{inicial}$, teremos, lembrando que ela vale para a força resultante de todas as forças (conservativas ou não)

7.10 Generalização da Conservação da Energia

É importante analisarmos a ação das forças de atrito em termos da conservação da energia mecânica. Para essa análise, podemos considerar o bloco de massa m mostrado na Figura 7.22. O bloco está ligado a uma

que agem no sistema,

$$\begin{aligned} W_i^f &= \int_{x_i}^{x_f} \{[F(x)]_{cons} + F_{atrito}\} dx \\ &= \int_{x_i}^{x_f} [F(x)]_{cons} dx + \int_{x_i}^{x_f} [F(x)]_{atrito} dx \quad (7.59) \\ &= K_f - K_i \end{aligned}$$

Para a força conservativa podemos escrever, utilizando a equação 7.39,

$$\int_{x_i}^{x_f} [F(x)]_{cons} dx = -\Delta U = U_i - U_f \quad (7.60)$$

Portanto, considerando que o trabalho da força de atrito é $W_{atrito} = \int_{x_i}^{x_f} [F(x)]_{atrito} dx$, podemos escrever a equação 7.59 como

$$W_i^f = U_i - U_f + W_{atrito} = K_f - K_i \quad (7.61)$$

ou, rearranjando os termos,

$$U_f + K_f = U_i + K_i + W_{atrito} \quad (7.62)$$

Se designarmos por E_0 a energia mecânica inicial e por E a energia mecânica final, podemos escrever a equação 7.62 como

$$E = E_0 + W_{atrito} \quad (7.63)$$

ou

$$\Delta E = E - E_0 = W_{atrito} \quad (7.64)$$

Ou seja, a energia mecânica sempre diminui sob a ação da força de atrito. Chamamos esse tipo de força de **força de não conservativa**, uma vez que o teorema do trabalho-energia cinética não se conserva quando ela atua sobre o sistema. Os passos dados para chegar à equação 7.64 podem ser facilmente repetidos para forças em duas e três dimensões, conduzindo ao mesmo resultado.

A ação das forças de atrito, ou **forças dissipativas**, tem outras consequências além de diminuir a energia mecânica. Todos sabemos que, ao atritarmos dois corpos rugosos entre si, a temperatura deles aumenta. Em geral, o aumento da temperatura de um corpo macroscópico está associado ao aumento de sua energia interna, o que pode ser traduzido, como no caso dos dois corpos atritados, em aumento da energia cinética de vibração dos átomos que os compõem (como será visto no volume 2 desta série).

Outros fenômenos parecem também manifestar o “aparecimento” ou o “desaparecimento” súbito da energia mecânica em um sistema de partículas. Um exemplo é a explosão de uma bomba. Nesse caso, as partículas que compõem a bomba estão em repouso, agregadas umas às outras. Após a explosão, a bomba se parte em muitos fragmentos, que se espalham com alta velocidade. De um corpo em repouso, então, “surge” uma grande quantidade de energia cinética. Na verdade, como acontece com as forças de atrito, o que acontece, nesse caso, é a transformação de uma forma de energia para outra. Uma reação química libera a energia associada à formação de ligações químicas, transferindo-a aos fragmentos da bomba, na forma de energia cinética. Nesse caso, a energia interna da bomba (na forma de energia de ligação química entre os átomos) diminuiu, possibilitando o aumento da energia mecânica.

Com base nessa discussão qualitativa, podemos estabelecer uma lei geral, a **lei da conservação da energia**, que pode ser expressa como:

Lei da conservação da energia: A energia total de um sistema isolado é constante e independente das forças que atuam no sistema. A energia pode ser transformada em outra forma de energia ou transferida de um sistema para outro, mas nunca pode ser criada ou destruída.

Essa é uma das leis mais importantes da natureza. Além dela, apresentaremos, neste volume, a lei de conservação do momento linear (Capítulo 8) e a lei de conservação do momento angular (Capítulo 10), formando um conjunto de três leis fundamentais da Física.

A lei de conservação da energia mecânica, estudada neste capítulo, é apenas um caso particular da lei de conservação da energia total, quando há somente forças conservativas agindo e quando a energia interna não é considerada. Nesse caso podemos expressar a lei de conservação da energia pela equação:

$$\Delta E_{mecânica} + \Delta U_{interno} = \Delta E_{total} = 0$$

A energia, portanto, nunca se extingue, apenas transforma-se de uma forma para outra. Como em uma usina hidroelétrica, onde a energia potencial de uma grande quantidade de água acumulada transforma-se, parte em energia elétrica, parte em energia cinética da água que é despejada pelas turbinas.

Exemplo 7.13

O bloco mostrado na Figura 7.23 desliza sobre o plano horizontal, sem atrito, em direção a uma elevação. O trecho horizontal AB do trajeto, que tem 0,50 m de comprimento, é o único trecho rugoso, apresentando um coeficiente de atrito cinético $\mu = 0,25$ com o bloco. Determine a velocidade v_O no ponto O, para que ele atinja o ponto C.

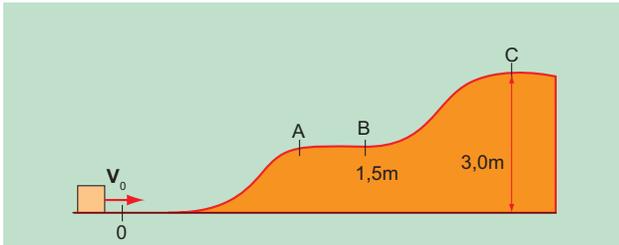


Figura 7.23: Um bloco deslizando sobre um plano horizontal.

Solução: o bloco, na situação limite, atingirá o ponto C com velocidade nula. Portanto, a energia mecânica em C será dada por:

$$E_C = mgh_C$$

Em O, a energia mecânica será dada por:

$$E_O = \frac{1}{2}mv_0^2$$

A relação entre E_O e E_C , dada pela equação 7.64, será:

$$E_C = E_O - \mu mg\Delta x$$

Portanto,

$$mgh_C = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mg\Delta x$$

Então, teremos:

$$v_0 = \sqrt{2g(h_C + \mu\Delta x)} = 7,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Observe que não foi necessário saber a altura do trecho AB para resolvermos este problema.

7.11 RESUMO

7.2 Trabalho e Energia Cinética em Uma Dimensão com Força Constante

O trabalho de uma força constante em uma dimensão é dado pelo produto da força pelo deslocamento da partícula durante o período de tempo que a força age, ou seja:

$$W = F\Delta x \quad (\text{Trabalho de um força constante}) \quad (7.6)$$

A energia cinética de uma partícula é dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{Energia cinética de uma partícula}) \quad (7.7)$$

Essas duas definições de energia estão relacionadas pelo teorema do trabalho-energia cinética, que diz que o trabalho da força resultante agindo sobre uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa mesma partícula, ou

$$W = K_f - K_i = \Delta K \quad (\text{Teorema do trabalho-energia cinética}) \quad (7.8)$$

7.3 Trabalho de Forças Variáveis em Uma Dimensão

O trabalho de uma força variável é dado por:

$$W_a^b = \int_a^b F(x) dx \quad (\text{Trabalho de uma força variável}) \quad (7.18)$$

Alguns problemas de mecânica podem ser estudados em função da posição e da velocidade, por meio da utilização do teorema do trabalho-energia cinética que, em uma dimensão, é formulado como:

$$W_a^b = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (\text{Teorema do trabalho-energia cinética - força variável}) \quad (7.17)$$

7.4 Trabalho de uma Força Elástica

Um dos problemas que podem ser resolvidos pelo teorema do trabalho-energia cinética é o das forças elásticas. Nesse caso, o trabalho realizado para distender ou comprimir uma mola é dado por:

$$W_a^b = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b (-kx) dx = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kb^2 \quad (7.19)$$



7.6 Potência

A taxa de variação temporal do trabalho de uma força é denominada potência e definida como:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (\text{Potência média}) \quad (7.30)$$

ou

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta \quad (\text{Potência instantânea}) \quad (7.33)$$

7.7 Conservação da Energia em Uma Dimensão: Força Gravitacional e Força Elástica

A energia potencial de uma partícula submetida a uma força gravitacional é dada por:

$$U_G = mgh \quad (\text{Energia potencial gravitacional}) \quad (7.36)$$

A energia mecânica de uma partícula é definida como:

$$E = K + U \quad (\text{Energia mecânica}) \quad (7.39)$$

A energia mecânica de uma partícula se conserva, se ela estiver submetida a uma força resultante que dependa apenas da posição. Esse tipo de força é definido como força conservativa. Esse teorema pode ser escrito como:

$$K_1 + U(x_1) = K_2 + U(x_2) = E_M \quad (7.44)$$

A energia potencial de uma partícula submetida a uma força conservativa é definida por:

$$\Delta U = U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (\text{Energia potencial em uma dimensão}) \quad (7.46)$$

que, pela definição de integral definida, conduz a:

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx} \quad (7.47)$$

7.8 O Sistema Massa-Mola em Detalhe

A energia potencial de um sistema massa-mola é dada por:

$$U(x) = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{Energia potencial elástica}) \quad (7.48)$$

7.9 Conservação da Energia em Duas e Três Dimensões

Força conservativa: Uma força é conservativa se o trabalho que ela realiza em uma partícula não depende do caminho. Em outras palavras, uma força é conservativa quando o trabalho sobre uma partícula que percorre qualquer trajetória fechada é nulo. A energia potencial corresponde ao simétrico do trabalho de uma força calculado entre uma origem arbitrária \mathbf{r}_0 e um ponto qualquer \mathbf{r} do espaço.

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{Energia potencial}) \quad (7.55)$$

Se uma força é conservativa, sua energia mecânica, que é a soma das energias cinética e potencial, se conserva, ou seja, se $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, então,

$$U(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} mv^2 = E = \text{constante} \quad (\text{Conservação da energia mecânica}) \quad (7.56)$$

7.10 Generalização da Conservação da Energia

Na presença de forças dissipativas, como forças de atrito, a variação da energia mecânica é dada por:

$$\Delta E = E - E_0 = W_{\text{atrito}} \quad (7.63)$$

Uma das leis mais importantes da Física é a lei da conservação da energia total, enunciada como:

Lei da Conservação da Energia: A energia total de um sistema isolado é constante e independente das forças que atuam no sistema. A energia pode ser transformada em outra forma de energia ou transferida de um sistema para outro, mas nunca pode ser criada ou destruída.

A lei de conservação da energia mecânica, é apenas um caso particular da lei de conservação da energia total, quando há somente forças conservativas e quando a energia interna não é considerada. Considerando apenas a energia mecânica e a energia internada de um sistema isolado, essa lei pode ser escrita como:

$$\Delta E_{\text{mecânica}} + \Delta U_{\text{interno}} = \Delta E_{\text{total}} = 0 \quad (7.64)$$

7.12 EXPERIMENTO 7.1 – Sistema Massa-Mola

Dante F. Franceschini Filho

Neste experimento, vamos complementar o estudo iniciado com o sistema massa-mola do experimento ??, onde determinamos as constantes elásticas de molas e de associações de molas em série e paralelo. Agora, utilizaremos a mesma montagem para estudarmos o trabalho de uma força conservativa variável e a conservação da energia mecânica. Para a realização deste experimento, utilizaremos as medidas das constantes elásticas das molas obtidas no experimento ??.

Aparato Experimental



(a)



(b)

Figura 7.24: (a) Uma mola é distendida por um peso; (b) Foto de uma montagem experimental. (Fonte: IFGW/Unicamp).

A montagem é semelhante à do experimento 6.1. Utilizaremos algumas molas penduradas em um suporte fixo e um reservatório onde serão colocados alguns pesos. Utiliza-se uma régua para se registrar a variação no comprimento das molas.

Experimento

- 1) Obtenha a elongação das molas para diferentes massas, mantendo-a em repouso, para as diferentes molas (se for necessário, obtenha novamente as constantes elásticas das molas a partir destes dados).
- 2) Utilizando uma das massas, registre novamente sua elongação e levante a massa até a posição de elongação nula da mola. Abandone cuidadosamente a massa e registre a elongação máxima da mola sem interferir no movimento dela, deixando-a descer até parar e retornar. Essa determinação deve ser cuidadosa, pois a massa estará em movimento. O estudante deve desenvolver uma técnica adequada para essa observação e repetir as mesmas determinações para diversos pesos e diversas molas.

3) Realize as medidas necessárias para reproduzir o experimento proposto no problema 24, utilizando apenas duas molas.

Análise dos Resultados

- 1) Utilizando os conjuntos de pontos obtidos, (x, P) do procedimento experimental (1), onde P é o peso da massa presa à mola, verifique a relação entre a variação da energia potencial gravitacional U_g e a variação da energia potencial elástica U_k . Para isso, faça um gráfico de U_g vs. U_k e determine o coeficiente angular da reta obtida. Determine qual é o valor teórico esperado. Comente sobre eventuais diferenças.
- 2) Repita novamente o item (1), graficando novamente U_g vs. U_k , mas utilizando os dados do procedimento experimental (2) e comparando os valores dos coeficientes angulares obtidos aos do item (1). Determine qual deveria ser o valor esperado e explique as diferenças observadas entre os dois coeficientes angulares.
- 3) Para cada peso adicionado, determine a razão entre o comprimento da mola em repouso e a elongação máxima da mola com o reservatório em movimento. Faça a média de todas as razões obtidas, compare com o resultado do exemplo 4 e estabeleça suas conclusões a respeito dessa comparação. Ao final, resolva o exemplo 4 utilizando a conservação da energia.
- 4) Resolva novamente o problema 7.24 utilizando apenas duas molas e verifique se as medidas realizadas no item (3) do procedimento experimental confirmam seus resultados.

7.13 EXPERIMENTO 7.2 – Forças Não Conservativas

Francisco C. Marques

Neste experimento, verificaremos a conservação da energia total quando uma força não conservativa atua no sistema. Para tanto, utilizaremos uma montagem onde a força de atrito age sobre um bloco movimento (ver Experimento 6.2, que utiliza a mesma montagem experimental).

Aparato Experimental

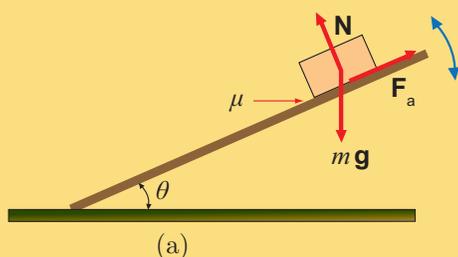


Figura 7.25: (a) Disco deslizando com atrito em um plano inclinado; (b) Foto de um sistema. (Fonte: IFGW/Unicamp).

Utilizaremos um plano inclinado e alguns blocos, com diferentes superfícies, colocados sobre a rampa. O ângulo da rampa pode ser alterado e medido com um transferidor ou utilizando relações trigonométricas. Usa-se um cronômetro para medir o tempo (ou dois fotosensores, um no início e outro no final da rampa).

Experimento

Posicione a rampa em um ângulo um pouco maior que o ângulo crítico para atrito estático e meça várias vezes o tempo de descida do bloco. Repita o mesmo procedimento para vários ângulos e para as diferentes superfícies.

Análise dos Resultados

- 1) Utilizando a média dos tempos obtidos, determine a aceleração do bloco, adotando a equação do movimento uniformemente acelerado, e obtenha a velocidade do bloco no final da rampa utilizando a equação de Torricelli. Faça um gráfico da aceleração em função do ângulo.
- 2) Utilizando a velocidade final, determine a energia cinética final dos blocos.
- 3) Determine a energia mecânica inicial e final do bloco e encontre a energia dissipada.
- 4) Utilizando a energia dissipada, determine a força de atrito F_a para os diferentes ângulos, utilizando o conceito de trabalho da força de atrito.

5) Monte um gráfico da força de atrito em função do ângulo de inclinação da rampa desde zero até 90 graus. Para tanto, utilize o valor do coeficiente de atrito estático obtido no Experimento 6.2 para obter a força de atrito na região de ângulo em que o bloco não desliza (de zero até o ângulo crítico).

7.14 QUESTÕES, EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

7.2 Trabalho e Energia Cinética em Uma Dimensão com Força Constante

7.1 Um bloco de massa $m = 5,0$ kg desliza sem atrito com uma velocidade de $v = 5,0$ m/s, quando atinge uma região rugosa do chão com 1,0 m de extensão, que tem um coeficiente de atrito cinético com o bloco igual a 0,30. Determine o trabalho da força de atrito e, a partir deste, a velocidade com que o bloco sai da região rugosa.

7.2 (Provão) Ao saltar com vara, um atleta corre e atinge a velocidade de 10 m/s. Verifica-se que o atleta alcança uma altura de 5,2 m. Pode-se afirmar que o atleta:

- (A) Utilizou exclusivamente a energia cinética adquirida na corrida, e conseguiu aproveitá-la integralmente.
 (B) Utilizou exclusivamente a energia cinética adquirida na corrida, e só conseguiu aproveitá-la parcialmente.
 (C) Utilizou exclusivamente a energia cinética adquirida na corrida, mas obteve um rendimento maior graças ao uso da vara.
 (D) Acrescentou à energia cinética adquirida na corrida mais energia, resultante de sua própria força muscular.
 (E) Não utilizou a energia cinética adquirida na corrida, mas a sua própria força muscular obtida do envergamento da vara.

7.3 Um homem está empurrando um caixote de 60,0 kg, aplicando sobre ele uma força horizontal, como mostra a Figura 7.26. A força aplicada é suficiente para equilibrar a força de atrito e permitir o movimento do caixote com uma velocidade constante. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o caixote e o chão é igual a 0,25, calcule o trabalho necessário para empurrar o caixote por uma distância igual a 2,0 m.



Figura 7.26: Problema 7.3.

7.4 Um bloco de madeira, com massa igual a 1,5 kg, desliza em um plano com inclinação de 60° em relação à horizontal. (a) Determine o trabalho da força resultante, quando o bloco desce 60,0 cm no plano, e (b) calcule o valor de sua velocidade ao completar o percurso, sabendo que a velocidade inicial era igual a 1,5 m/s no lançamento. (c) Faça o

mesmo para o caso em que o coeficiente de atrito é igual a 0,2.

7.3 Trabalho de Forças Variáveis em Uma Dimensão

7.5 Uma partícula percorre uma trajetória em linha reta, enquanto sobre ela atua uma força que varia com a posição. Essa força $F(x)$ varia, em uma determinada região, de acordo com a equação: $F(x) = F_0 e^{-x^2}$. (a) Esboce o gráfico da variação da força em função da posição, entre $x = -2$ e $x = 2$, e determine, aproximadamente, o trabalho realizado pela força, calculando o somatório aproximativo (equação 7.10), dividindo o intervalo em (b) 5 subintervalos e (c) 15 subintervalos. (d) Compare os resultados obtidos com o cálculo explícito (equação 7.14) do trabalho entre $x = -\infty$ e $x = \infty$.

7.6 Uma partícula de massa igual a 1,0 kg está submetida a uma força dependente da posição $F(x)$, da qual só se conhecem alguns valores, em posições bem determinadas. Esses valores, determinados entre $x = 0$ e $x = 2$ m estão mostrados na Tabela 1. Determine a variação da velocidade dessa partícula, em função da posição, quando ela trafega no sentido positivo do eixo dos x, entre 0,0 m e 2,0 m, por meio do cálculo aproximado do trabalho da força F nesse intervalo. No instante inicial, em $x = 0$ m, a partícula está em repouso.

Tabela 7.1: Problema 7.6.

x(m)	F(x) (N)
0	0
0,2	0,36
0,4	0,64
0,6	0,84
0,8	0,96
1	1
1,2	0,96
1,4	0,84
1,6	0,64
1,8	0,36
2	0

7.7 (Provão) Uma força no plano xy é dada por $F = \frac{F_0}{r}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$, onde F_0 é uma constante e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. O trabalho realizado por essa força sobre uma partícula: é (A) Igual a $-2\pi R F_0$, se a partícula descrever uma circunferência completa de raio R, no sentido anti-horário. (B) Igual a $F_0 r$, se a partícula se deslocar em linha reta, desde a origem até o ponto localizado em $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

- (C) Nulo, se a partícula percorrer um número inteiro de ciclos sobre uma circunferência.
- (D) Sempre nulo, para qualquer deslocamento sobre um arco de circunferência.
- (E) Independente da trajetória no plano onde a partícula se desloca.

7.8 Uma corrente fina e uniforme de 6 m tem densidade de massa 1 kg/m. Uma ponta da corrente está presa a uma roldana horizontal com raio pequeno comparado com o tamanho da corrente. Se a corrente está inicialmente pendurada verticalmente, qual é o trabalho requerido para enrolar toda a corrente lentamente na roldana?

7.9 Uma partícula com massa igual a 3,5 kg movimenta-se em linha reta, sendo a sua velocidade em função da posição dada pelo gráfico mostrado na Figura 7.27. Determine o trabalho realizado pela força resultante em cada um dos trechos OA, AB, BC, CD e DE.

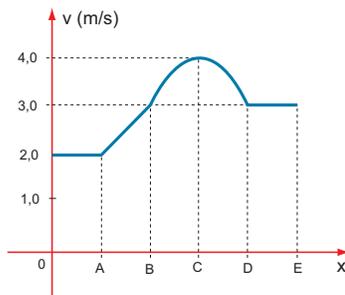


Figura 7.27: Problema 7.9.

7.4 Trabalho de uma Força Elástica

7.10 Repita o problema 7.5 para uma partícula submetida à força elástica de uma mola de constante $k = 13\text{ N/m}$, também para a região $-2 < x < 2$. Obs.: calcule ponto a ponto o valor da força, para os números de intervalos daquele problema.

7.5 Teorema do Trabalho-Energia Cinética em Duas e Três Dimensões

7.11 A mesma tarefa exposta no problema 7.3 é realizada de outra forma, como mostra a Figura 7.28. Agora, o homem puxa o mesmo caixote por meio de uma corda esticada, a qual faz um ângulo de 30° com a horizontal. Determine: (a) o módulo de \mathbf{F} para que o caixote se movimente com velocidade constante e (b) o trabalho realizado por essa força para deslocar o caixote em 2,0 m.

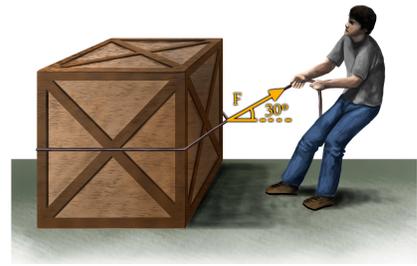


Figura 7.28: Problema 7.11 .

7.12 Uma partícula movimenta-se em um plano, sendo a força que atua sobre ela dada por $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$. Calcule o trabalho realizado por essa força, entre os pontos A (0,0) e B (2,2), quando a partícula trafega por cada um dos três caminhos mostrados na Figura 7.29 (I, II, e III).

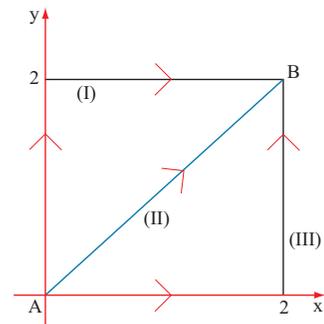


Figura 7.29: Problema 7.12 .

7.6 Potência

7.13 Em uma linha de produção de máquinas, um braço mecânico é utilizado para empurrar uma peça de uma máquina, que tem massa igual a 25 kg, por um percurso retilíneo de 1,0 m (Figura 7.30). O coeficiente de atrito entre a peça e a superfície sobre a qual ela desliza é igual a 0,2. Sabendo que a produção é de 30 peças por minuto e supondo que o braço mecânico empurra a peça com uma velocidade constante, (a) determine a potência média utilizada pelo braço mecânico e (b) calcule e expresse em kWh a economia de energia, em um dia de trabalho contínuo, proveniente da redução para $m = 0,12$ do coeficiente de atrito entre as superfícies. (Obs.: o kWh (quilo-watt hora) é uma unidade de energia muito utilizada, principalmente para descrever o consumo de energia elétrica, sendo equivalente a $1.000\text{ W} \times 3.600\text{ s}$, ou seja, $3,6 \times 10^6\text{ J}$, no SI, ver Apêndice C).

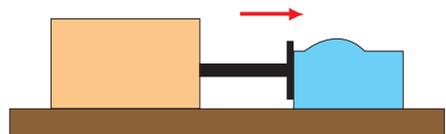


Figura 7.30: Problema 7.13 .

7.14 (Enade) Um professor propõe aos seus alunos o seguinte problema:

Um automóvel de passeio tem velocidade constante de 72 km/h em uma estrada retilínea e horizontal. Sabendo que o módulo da resultante das forças de resistência ao movimento do automóvel é, em média, de 2×10^4 N, determine a potência média desenvolvida pelo motor desse automóvel.

Esse problema é:

- (A) Adequado, porque o valor da potência obtido é típico de um automóvel.
 (B) Adequado, porque situação faz parte do cotidiano do aluno.
 (C) Inadequado, porque um automóvel nunca atinge essa velocidade.
 (D) Inadequado, porque essa situação não faz parte do cotidiano do aluno.
 (E) Inadequado, e porque o resultado obtido está fora da realidade.

7.15 Uma pessoa, com a finalidade de fazer fogo, está atritando dois pedaços de madeira entre si, de modo que o calor gerado pelo trabalho da força de atrito inicia o processo de combustão. Sabendo que a força normal entre os pedaços de madeira é igual a 20 N, que o coeficiente de atrito cinético é igual a 0,35, que a amplitude do movimento relativo dos pedaços de madeira é de 10,0 cm e que cada “esfregada” completa (movimento de ida e volta) dos pedaços de madeira demora 0,5 s, determine a potência associada à força de atrito.

7.7 Conservação da Energia em Uma Dimensão: Força Gravitacional e Força Elástica

7.16 Resolva os itens (b) e (c) do problema 7.4 usando a conservação da energia mecânica.

7.17 Uma bola de borracha cai de uma altura h . Ao saltar do chão, sua velocidade é de 70 % do valor antes de tocar no chão. Qual é a próxima altura alcançada pela bola?

7.18 Uma partícula se movimenta em linha reta, sob a ação da força cuja variação está mostrada na Figura 7.31. Determine as equações que descrevem, em cada trecho de sua trajetória, a energia potencial da partícula, utilizando a posição $x = 0$ como origem da energia potencial.

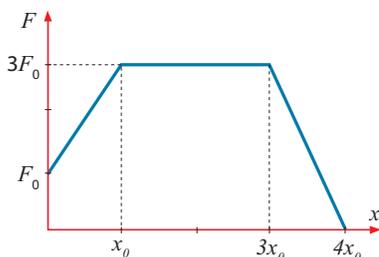


Figura 7.31: Problema 7.18.

7.19 (Enade) Em virtude de graves acidentes ocorridos recentemente, realizaram-se dois ensaios para testar a segurança de praticantes de *bungee jump*, utilizando uma pedra

de massa $M = 60$ kg, presa à extremidade de uma corda elástica, solta de uma ponte de altura $H = 60$ m, acima da superfície de um rio. Suponha que a corda, no estado relaxado, tenha comprimento $L = 30$ m e se alongue de acordo com a lei de Hooke, com constante elástica $k = 150$ N/m. No ensaio A, foram medidas a elongação máxima da corda (d) e a menor distância atingida pela pedra em relação à superfície do rio (h) e, no ensaio B, a posição de equilíbrio da pedra (l), conforme o esquema abaixo.

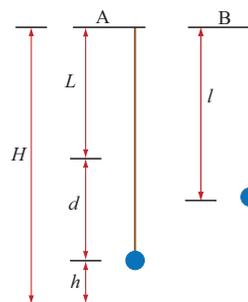


Figura 7.32: Problema 7.19.

Adotando $g = 10$ m/s² e desprezando a resistência do ar, quais são os valores de d , h e l , respectivamente, medidos em metros?

7.20 Uma partícula de massa $m = 1$ kg movimenta-se com a energia potencial dada por $U(x) = 12x^3 - 48x^2 + 48x$, com unidades no SI.

- (a) Esboce o gráfico de $U(x)$ para a região $-0,4 < x < 2,4$ m.
 (b) Descreva qualitativamente os movimentos possíveis para a partícula quando sua energia mecânica é dada por $E_0 = 20$ J, $E_1 = 10$ J e $E_3 = -10$ J.
 (c) Determine os pontos de equilíbrio possíveis para a partícula.
 (d) Se a energia mecânica da partícula é igual a 10 J, determine a velocidade da partícula ao passar por $x = 2$ m.

7.21 Em um laboratório, consegue-se submeter uma partícula, em uma região limitada ($-L < x < L$), a uma força dada por $F(x) = F_0 \text{sen}(\frac{2\pi x}{L})$. Sabendo que, fora dessa região a força exercida sobre a partícula é nula, (a) determine uma expressão para a energia potencial. (b) Sabendo que a partícula tem energia mecânica $E < F_0 L / \pi$, descreva os possíveis movimentos da partícula em função de sua energia mecânica.

7.22 A Figura 7.33 mostra a energia potencial $U(x)$ à qual uma partícula de massa m está submetida. Sabendo que, no gráfico mostrado, $U_0 < U_1 < U_2 < U_3$, responda aos seguintes itens:

- (a) Qual é a energia cinética mínima que a partícula deve ter em $x = 0$, de modo a ultrapassar a posição $x = x_1$?
 (b) Nas condições do item (a), qual é a energia mecânica da partícula em $x = x_0$?
 (c) Descreva os movimentos possíveis para a partícula, na região representada no gráfico, para uma energia mecânica E tal que $U_1 < E < U_2$.
 (d) Se $E = 2U_3$, determine a velocidade da partícula quando ela passa por $x = x_2$.

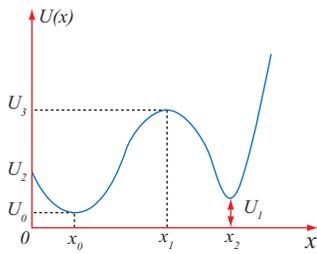


Figura 7.33: Problema 7.22.

7.8 O Sistema Massa-Mola em Detalhe

7.23 Uma solução da equação de movimento para o sistema massa-mola, ou oscilador harmônico, é dada por: $x = x_0 \cos(\omega t)$, onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A partir dessa equação, determine a velocidade da partícula e substitua os valores de $x(t)$ e $v(t)$ na equação que exprime a conservação da energia do sistema massa-mola, verificando que a energia mecânica é constante.

7.24 (Provão) Dispondo-se de três molas idênticas e um corpo de massa m , realiza-se a seguinte atividade experimental em sala de aula:

- 1) Pendura-se, verticalmente, em um suporte, o corpo em uma dessas molas e verifica-se que o alongamento da mola é Δx .
- 2) Em seguida, associam-se as três molas em série, pendura-se o mesmo corpo nessa associação e verifica-se que, agora, o alongamento do conjunto formado é $3\Delta x$.
- 3) Finalmente, pode-se demonstrar, teoricamente, que, nessas condições, o sistema formado pelas três molas em série adquire o triplo da energia potencial elástica adquirida pelo sistema formado por uma única mola.

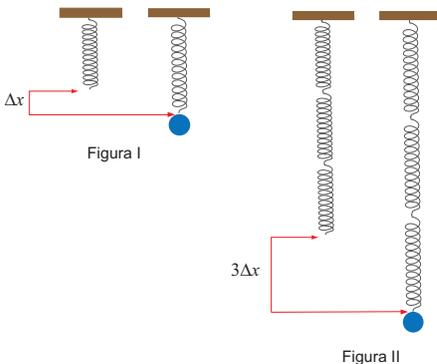


Figura 7.34: Problema 7.24.

(a) Explique fisicamente o resultado obtido em 2. (b) Faça a demonstração citada em 3. (c) Alguns alunos duvidam do resultado obtido em 3. Argumentam que, como o corpo pendurado nas duas situações é o mesmo, a energia não poderia ter triplicado. Como é possível refutar essa argumentação? Qual é a causa dessa "multiplicação" da energia?

7.25 Na Figura 7.35, um bloco de massa m movimentar-se com velocidade v_0 após ter sido lançado, a partir do

repouso, pela mola de constante k no lado esquerdo do trajeto. O bloco desliza sem atrito por toda a pista, exceto no trecho de comprimento d assinalado na figura. Determine (a) a compressão máxima da mola da esquerda antes do lançamento, (b) a velocidade do bloco logo após terminar de subir o plano inclinado e (c) a compressão máxima da mola da direita, também de constante k , após ter sido atingida pelo bloco.

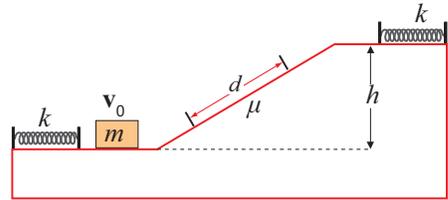


Figura 7.35: Problema 7.25.

7.26 Ao verificar experimentalmente a Lei de Hooke em uma mola defeituosa, um estudante de Física concluiu que a equação que melhor se ajustava aos seus resultados experimentais era: $F(x) = -k_1x - k_2x^3$, onde $k_1 = 8,7 \text{ N/m}$ e $k_2 = 3 \text{ N/m}^3$. Determine (a) a energia potencial de um sistema massa-mola com essa mola, com origem em $x = 0$ e (b) a elongação máxima da mola, sabendo que a massa ($m = 0,2 \text{ kg}$) passa pela posição $x = 0$ com velocidade igual a $1,3 \text{ m/s}$.

7.27 (Provão) A Figura 7.36 representa um bloco de massa $m = 1,0 \text{ kg}$ apoiado sobre um plano inclinado no ponto A. A mola tem constante elástica $k = 10 \text{ N/m}$ e está vinculada ao bloco. O bloco é solto da altura $h = 40 \text{ cm}$, com a mola na vertical, sem deformação.

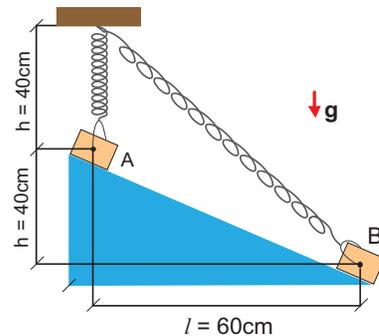


Figura 7.36: Problema 7.27.

Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, qual é a sua velocidade, em m/s, ao passar pelo ponto B?

7.28 Uma partícula está submetida a uma força dependente da posição, dada pela equação $F(x) = -kxe^{-\alpha x^2}$, onde k e α são constantes. Observe que, para uma região em torno de $x = 0$, a equação representa aproximadamente a Lei de Hooke e que, para x tendendo a infinito, a força se anula, podendo ser entendida, portanto, como uma força elástica "blindada" ou restrita a uma dada região.

- (a) Esboce o gráfico da força para $k = 1,0 \text{ N/m}$ e $\alpha = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^{-2}$.
- (b) Determine a energia potencial para k e α qualquer, usando $x = 0$ como origem.
- (c) Discuta os movimentos possíveis para a partícula, em função do valor da energia mecânica.

7.9 Conservação da Energia em Duas e Três Dimensões

7.29 Com base na resposta dada ao problema 7.12, (a) diga se a força \mathbf{F} é conservativa. (b) Repita o problema 7.12 para uma força dada por $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, mostrando que essa nova força é compatível com a definição de força conservativa.

7.30 Uma pequena esfera está presa a um fio de comprimento R , que será largado a partir do repouso, com o fio fazendo um ângulo θ com a vertical, como mostra a Figura 7.37. O fio está preso à extremidade de um prego cravado em uma parede fixa, sendo que o comprimento do prego é suficiente para que a esfera não toque a parede. Na mesma parede, em A, está preso um outro prego a uma distância d do ponto O, sendo vertical a linha que une O a A. Determine o ângulo θ de modo que a esfera dê uma volta completa em torno de A, após o fio atingir o prego preso a este ponto.

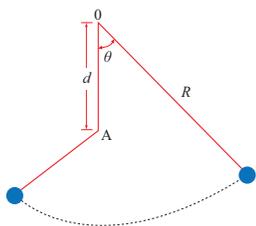


Figura 7.37: Problema 7.30.

7.31 Considere a situação do exemplo 7.12, mostrada na figura 7.21, e determine a força normal que o trilho exerce sobre o vagão, nos pontos A e C da trajetória, se o vagão é largado de uma altura $h = (5/2)R$, ou seja, da altura mínima para atingir o ponto B, no topo do looping. Considere a massa do vagão igual a m .

7.32 Uma partícula de massa M move-se em uma órbita circular de raio r submetida a uma força de atração $F = \frac{k}{r^3}$, onde k é uma constante. Qual é a energia total da partícula nesta órbita se a energia total dela em repouso a uma distância infinita do centro de força é zero?

7.33 (USP) Um objeto de massa m desliza em um trilho liso mostrado na figura abaixo. Inicialmente, o objeto está em repouso, a uma altura h acima do topo do semicírculo AC.

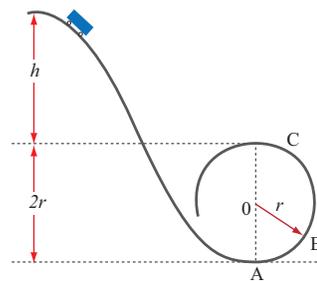


Figura 7.38: Problema 7.33.

- (a) Faça um diagrama das forças que agem no objeto quando ele está no ponto B do semicírculo. Defina θ como o ângulo do vetor posição medido em relação à direção \mathbf{O} . Escreva as equações de movimento nas direções radial e tangencial.
- (b) Qual é a magnitude e direção da força exercida no objeto pelo trilho, quando ele passa no ponto A?
- (c) Mostre que $h \geq r/2$, para que o objeto atinja o ponto C do trilho.
- (d) Para $h \leq r/2$, o objeto abandona o trilho antes de atingir o ponto C. Mostre que isso ocorre na posição tal que $-3 \cos \theta = 2 + 2h/r$.

7.34 Uma caixinha de fósforos é abandonada, a partir do repouso, sobre uma superfície esférica lisa, sem atrito, de raio R , na posição mostrada na Figura 7.39. Determine o ângulo θ no qual a caixa perde contato com a esfera.

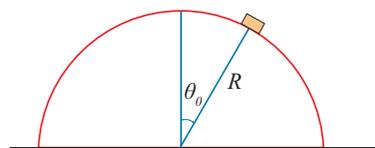


Figura 7.39: Problema 7.34.

7.10 Generalização da Conservação da Energia

7.35 A mola da Figura 7.40 tem constante elástica $k = 13,0 \text{ N/m}$. O plano inclinado faz um ângulo de 45° com a horizontal e a altura h mostrada é de $0,54 \text{ m}$. O bloco, que tem massa igual a $1,0 \text{ kg}$, pode escorregar pelo plano inclinado livre de atrito, a não ser na região hachureada, onde o coeficiente de atrito é igual a $0,27$. Determine a compressão máxima da mola, quando o bloco a atinge, após ser abandonado a partir do repouso, na posição mostrada na figura.

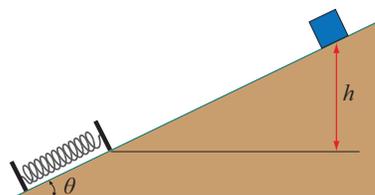


Figura 7.40: Problema 7.35.

7.36 Um sistema massa-mola é composto por um bloco com massa igual a 0,5 kg, que pode deslizar com atrito sobre o solo, e uma mola com constante elástica igual a 10 N/m. O bloco é deslocado de uma distância de 5 m da posição relaxada da mola e largado a partir do repouso. Sabendo que o bloco pára na posição relaxada da mola, determine o coeficiente de atrito entre o bloco e o solo.

7.37 Em um brinquedo de parque de diversões (Figura 7.41), um vagão com massa igual 100 kg passa pelo ponto A com velocidade igual a 30,0 m/s. Espera-se que ele atinja o ponto C do *looping* mostrado na figura, passando antes pelo túnel na posição B, sem que seja necessária qualquer propulsão. Entretanto, o trilho apresenta um problema dentro do túnel, que faz com que parte da energia do vagão seja dissipada por forças de atrito. Determine o valor máximo admissível para esta perda de energia, de forma que o vagão ainda consiga atingir com segurança o ponto C.

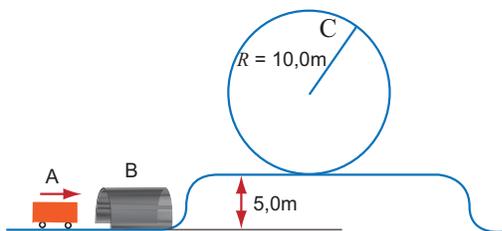


Figura 7.41: Problema 7.37.

7.38 Um objeto desliza sem atrito na pista mostrada na Figura 7.42. Ele é impulsionado no ponto A com velocidade v_0 , de modo a atingir o ponto D com velocidade igual a 5,0 m/s. (a) Determine v_0 . (b) Determine qual deve ser

o valor de v_0 para que o objeto não consiga ultrapassar o ponto D. (c) Considerando o valor de v_0 original, determine a distância d para que o objeto não ultrapasse o ponto D, supondo que, no trecho BC, a superfície seja rugosa apresentando, com o objeto, coeficiente de atrito igual a 0,2.

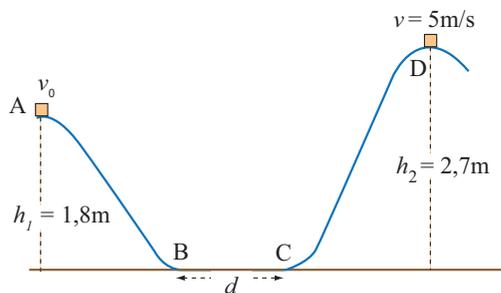


Figura 7.42: Problema 7.38.

7.39 A Figura 7.43 mostra uma pedra de gelo prestes a ser largada na borda de uma tigela de vidro. A pedra de gelo desliza praticamente sem atrito na superfície da tigela, a não ser em seu fundo plano, que é rugoso. Sabendo que o coeficiente de atrito entre a pedra de gelo e o fundo da tigela é igual a 0,10, que a altura $h = 20$ cm e que $d = 10$ cm, determine a posição em que a pedra de gelo para.

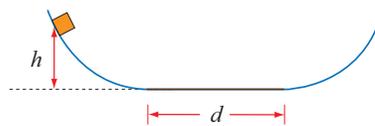


Figura 7.43: Problema 7.39.